

# الدوال المبرمجية



www.tarbiadz.online

أصبح أم خطأ:

## حل التعريف (01):

- إذا كان  $x > 2$  فإن:  $x^2 > 4$  صحيح.
- إذا كان  $x^2 > 4$  فإن:  $x > 2$  خطأ.
- إذا كان  $x \leq -2$  فإن:  $x^2 \leq 4$  خطأ.
- إذا كان  $x \in [-5 ; -7]$  فإن:  $x^2 \geq 9$  صحيح.
- إذا كان  $x^2 \leq 9$  فإن:  $-3 \leq x \leq 3$  صحيح.
- إذا كان  $-5 \leq x \leq -3$  فإن:  $9 \leq x^2 \leq 25$  صحيح.
- إذا كان  $4 \leq x^2 \leq 36$  فإن:  $2 \leq x \leq 6$  خطأ.
- إذا كان  $x \in [-2 ; 3]$  فإن:  $x^2 \in [4 ; 9]$  خطأ.

## حل التعريف (02):

- مربع كل عدد حقيقي  $x$  يكون أكبر من  $x$  خطأ.
- أكبر قيمة لدالة مربع على  $[a ; b]$  هي:  $a^2$  أو  $b^2$  صحيح.

## حل التعريف (03):

- أ/ الدالة مربع متناقصة على  $[-1 ; -3]$  صحيح.
- ب/ الدالة مربع متزايدة على  $\mathbb{R}$  خطأ.

## حل التعريف (04):

- إذا كان  $\alpha < 0 < B$  فإن:  $\alpha^2 < B^2$  خطأ.
- إذا كان  $\alpha < B$  فإن:  $\alpha^2 < B^2$  خطأ.

• إذا كان  $\alpha > B$  فإن:  $\alpha^2 > B^2$  خطأ.

✓ صور وسوابق:

حل التمرين 05: إتمام الجدول:

$x$	3	-2	$2\sqrt{3}$	$-\frac{1}{5}$	$2 \times 10^{-2}$	0,3
$x^2$	9	4	12	$\frac{1}{25}$	$4 \times 10^{-4}$	0,09
$-x^2$	-9	-4	-12	$-\frac{1}{25}$	$-4 \times 10^{-4}$	-0,09
$(-x)^2$	9	4	12	$\frac{1}{25}$	$4 \times 10^{-4}$	0,09

حل التمرين 06:

أ/ تعيين صور القيم بالدالة  $f$ :

$$f(\sqrt{2} - \sqrt{3}) = (\sqrt{2} - \sqrt{3})^2 = 2 - 2\sqrt{6} + 3 = 5 - 2\sqrt{6}$$

$$f\left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right) = \left(-\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 = \frac{7}{4}$$

$$f(-2) = 4 \quad ; \quad f(-4) = 16$$

ب/ مقارنة بين صورة  $2 - \sqrt{3}$  وصورة  $\sqrt{3} - 2$ :

$$f(2 - \sqrt{3}) = (2 - \sqrt{3})^2 = 4 - 4\sqrt{3} + 3 = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$f(\sqrt{3} - 2) = (\sqrt{3} - 2)^2 = 3 - 4\sqrt{3} + 4 = 7 - 4\sqrt{3}$$

$$\text{وعليه: } f(2 - \sqrt{3}) = f(\sqrt{3} - 2)$$

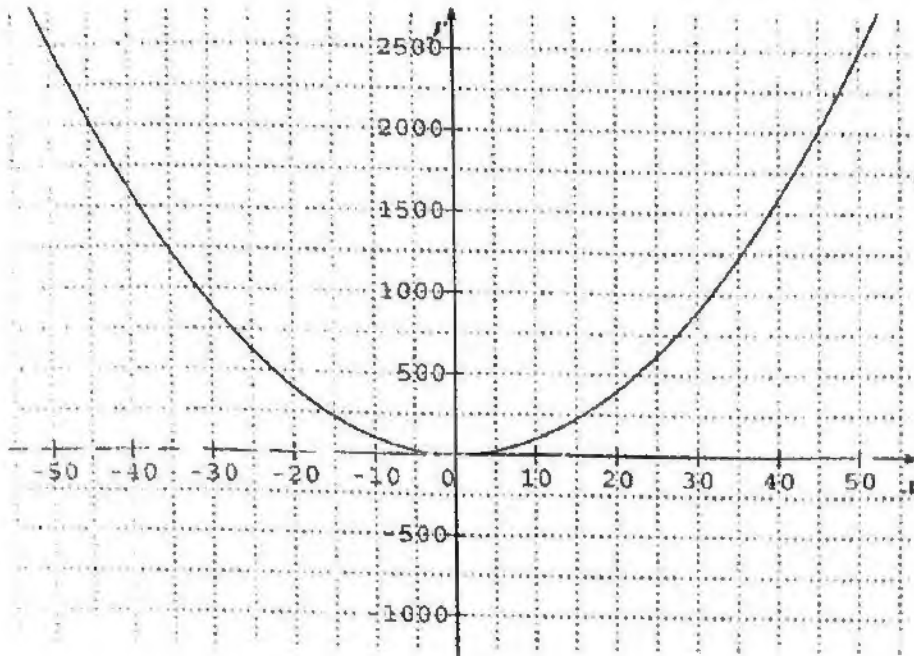
ج/ لا توجد سوابق للعدد (-2) لأن:  $x^2 \geq 0$  مهما يكن  $x$ .

سوابق  $5 - 2\sqrt{6}$  بالدالة  $f$  هما:  $\sqrt{3} - \sqrt{2}$  أو  $\sqrt{2} - \sqrt{3}$  لأن:

$$(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2 = 3 - 2\sqrt{6} + 2 = 5 - 2\sqrt{6}$$

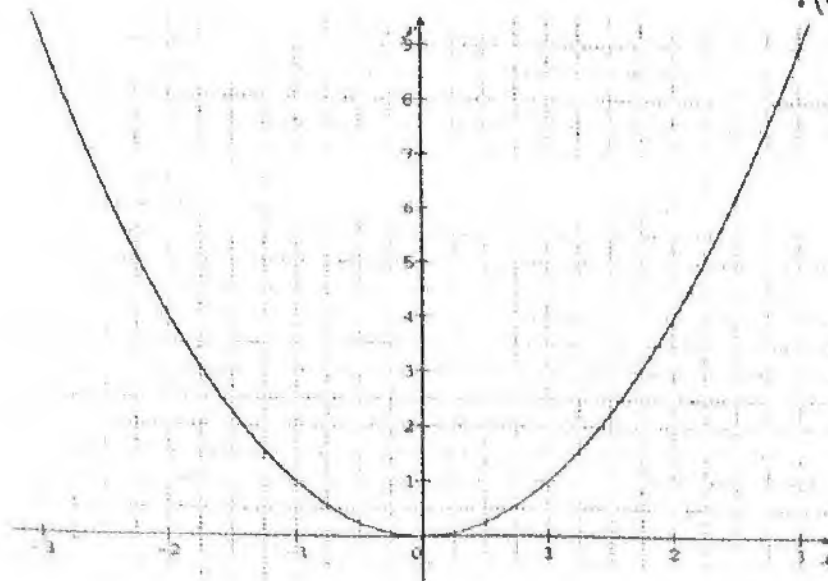
### حل التعريف (07):

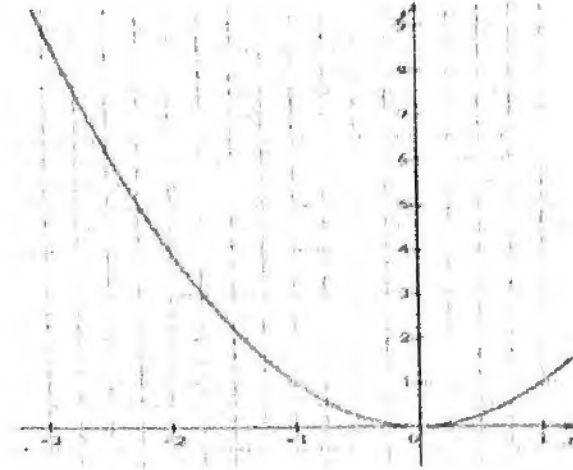
- (C) هو التمثيل البياني للدالة  $f$  المعرفة على  $[-50; 50]$  بالعلاقة:  $f(x) = x^2$ .
- \* إنشاء (C) في معلم متعامد (تمثل 10 بـ: 1cm في محور الفواصل وتمثل 500 بـ: 1cm في محور الترتيب).



### حل التعريف (08):

- / (C) هو التمثيل البياني للدالة  $f$  هي الدالة المعرفة على  $I = [-3; 3]$  بـ:  $f(x) = x^2$ .
- \* إنشاء (C):

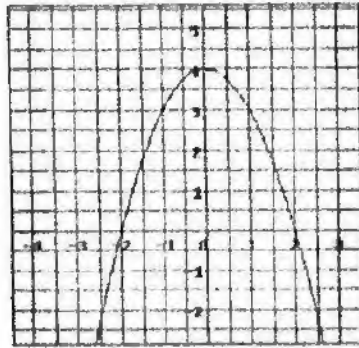


ب/ في حالة  $x \in [-3; 1]$ :

(C) يقبل محور تناظر وهو محور الترتيب.

في هذه الحالة المنحنى (C) لا يقبل مركز تناظر ولا محور تناظر.

• حل التعريف (09):

• إليك التمثيل البياني لدالة  $f$  من الشكل  $x \rightarrow ax^2 + b$ .

باستعمال الشكل لدينا:  $f(0) = 4$  ;  $f(1) = 3$   
 $f(-2) = 0$

ب/ جدول تغيرات الدالة  $f$ :

قيم $x$	-2,5	0	2,5
تغيرات $f$	-2	4	-2

ج/ إشارة وعدد حلول المعادلة  $f(x)=1$  :

عدد حلول المعادلة  $f(x)=1$  هو اثنان أحدهما موجب والآخر سالب.

د/ المعادلة  $f(x)=5$  لا تقبل حلول لأن القيمة الحدية العظمى للدالة  $f$  هي 4.  
استعمال اتجاه التغير:

حل التمرين (10):

• المقارنة في كل حالة:

$$7,003^2 > 7,002^2$$

$$(-2,01)^2 > (-1,99)^2$$

$$(-7,4629)^2 < (-7,463)^2$$

$$-47^2 > -43,14^2$$

حل التمرين (11):

• المقارنة في كل حالة:

أ/ بما أن:  $x \geq 0$  فإن:  $x-3 < x+2$  وبما أن الدالة "مربع" متزايدة نعلم:  
 $[0; +\infty[$  وبالتالي:  $(x+2)^2 > (x-3)^2$ .

ب/ بما أن:  $x \geq 1$  فإن:  $1-x < 2-x$  وبما أن الدالة "مربع" متناقصة نعلم:  
 $] -\infty; 0]$  وبالتالي:  $(1-x)^2 > (2-x)^2$ .

التمثيل البياني:

حل التمرين (12):

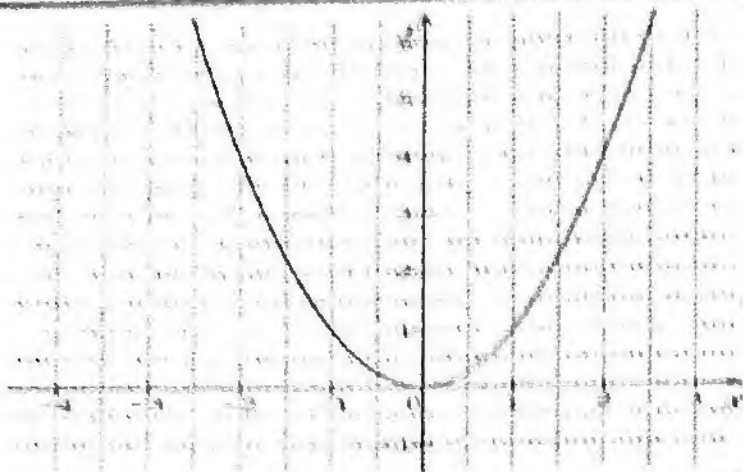
• إيجاد حصر للعدد الحقيقي  $x^2$  في كل حالة:

$$0 \leq x^2 \leq 9; x \in [-3; 3]$$

$$0 \leq x^2 < 0,09; x \in [-0,3; 0,3[$$

$$0 \leq x^2 \leq 0,04; x \in [-0,2; 0,2]$$

$$4 \leq x^2 < 16; x \in ]-4; -2[$$



### مع حل التحريث (13):

$f$  الدالة المعرفة على  $[-10 ; 7]$  بـ:  $f(x) = x^2 - 10$

ليكن  $x_1$  و  $x_2$  عدنان من  $[-10 ; 0]$  حيث:  $x_1 < x_2$ .

بما أن:  $x_1 < x_2 < 0$  وبما أن الدالة "مربع" متناقصة تماما على  $]-\infty ; 0]$  وبالتالي:

$$x_1^2 > x_2^2 \text{ بإضافة } (-10) \text{ نجد } x_1^2 - 10 > x_2^2 - 10$$

أي:  $f(x_1) > f(x_2)$  وعليه: الدالة  $f$  متناقصة تماما على المجال  $[-10 ; 0]$ .

من جهة أخرى: ليكن  $x_1$  و  $x_2$  عدنان من  $[0 ; 7]$  حيث:  $x_1 < x_2$ .

بما أن:  $x_1 < x_2 < 0$  وبما أن الدالة "مربع" متزايدة تماما على  $[0 ; +\infty[$  وبالتالي:

$$x_1^2 < x_2^2 \text{ بإضافة } (-10) \text{ نجد: } x_1^2 - 10 < x_2^2 - 10$$

أي:  $f(x_1) < f(x_2)$  و عليه الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0 ; 7]$ .

$$\text{لدينا: } f(-10) = (-10)^2 - 10 = 100 - 10 = 90$$

$$f(0) = (0)^2 - 10 = -10$$

$$f(7) = (7)^2 - 10 = 49 - 10 = 39$$

\* جدول تغيرات الدالة  $f$ :

قيم $x$	-10	0	7
تغيرات $f$	90	-10	39

القيمة الحدية الصغرى للدالة  $f$  الدالة على:  $[-10 ; 7]$  هي: (-10).

### حل التمرين (14):

\* تعيين اتجاه تغير كل دالة من الدوال التالية:

أ/  $f$  معرفة على  $[2 ; 3]$  بالعلاقة:  $f(x) = 4(x-3)^2 + 1$

$x_1$  و  $x_2$  عدنان حقيقيان من المجال  $[2 ; 3]$  حيث:  $x_1 < x_2 < 3$

نضيف (-3) فنجد:  $x_1 - 3 < x_2 - 3 < 0$

إذن:  $(x_1 - 3)^2 > (x_2 - 3)^2$  لأن الدالة مربع متناقصة على  $]-\infty ; 0]$

وعليه:  $4(x_1 - 3)^2 > 4(x_2 - 3)^2$

أي:  $4(x_1 - 3)^2 + 1 > 4(x_2 - 3)^2 + 1$

أي:  $f(x_1) > f(x_2)$

وعليه الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $[2 ; 3]$ .

ب/  $g$  دالة معرفة على  $]-\infty ; -1[$  بـ:  $g(x) = -2(x+1)^2 + 7$

$x_1$  و  $x_2$  عدنان حقيقيان من المجال  $]-\infty ; -1[$  حيث:

$x_1 < x_2 < -1$  نضيف (+1) فنجد:  $x_1 + 1 < x_2 + 1 < 0$

بالتربيع نجد:  $(x_1 + 1)^2 > (x_2 + 1)^2$  لأن الدالة مربع متناقصة على  $]-\infty ; 0]$

$-2(x_1 + 1)^2 < -2(x_2 + 1)^2$  (بضرب في العدد -2)

$-2(x_1 + 1)^2 + 7 < -2(x_2 + 1)^2 + 7$  أي:  $f(x_1) < f(x_2)$

وعليه: الدالة  $g$  متزايدة على المجال  $]-\infty ; -1[$ .

ج/ الدالة  $h$  المعرفة على  $]-\infty ; -1[$  بـ:  $h(x) = 3(x+1)^2 - 7$

$x_1$  و  $x_2$  عدنان حقيقيان من المجال  $]-\infty ; -1[$  حيث:

$x_1 < x_2 \leq -1$  بإضافة 1 نجد:  $x_1 + 1 < x_2 + 1 \leq 0$

وعليه:  $(x_1 + 1)^2 > (x_2 + 1)^2$  لأن الدالة مربع متناقصة على المجال  $]-\infty ; 0]$

وعليه:  $3(x_1 + 1)^2 > 3(x_2 + 1)^2$

$3(x_1 + 1)^2 - 7 > 3(x_2 + 1)^2 - 7$

أي:  $h(x_1) > h(x_2)$  وعليه الدالة  $h$  متناقصة على المجال  $]-\infty ; -1[$ .



## ✓ القيم الحدية:

## • حل التمرين (15):

$$f(4) = (4-4)^2 + 5 = 5 \text{ لدينا:}$$

$$f(x) - f(4) = (x-4)^2 + 5 - 5 = (x-4)^2 \geq 0 \text{ وعليه:}$$

من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا:  $f(x) - f(4) \geq 0$  أي:  $f(x) \geq 5$ .

وعليه: أصغر قيمة ممكنة للدالة  $f$  هي 5.

## • حل التمرين (16):

$$\bullet \text{ تعطينا: } f(x) + 15$$

$$f(x) = 9x^2 - 12x - 11 \text{ ملاحظة: } \checkmark$$

$$f(x) + 15 = 9x^2 - 12x - 11 + 15$$

$$f(x) + 15 = 9x^2 - 12x + 4 \text{ لدينا:}$$

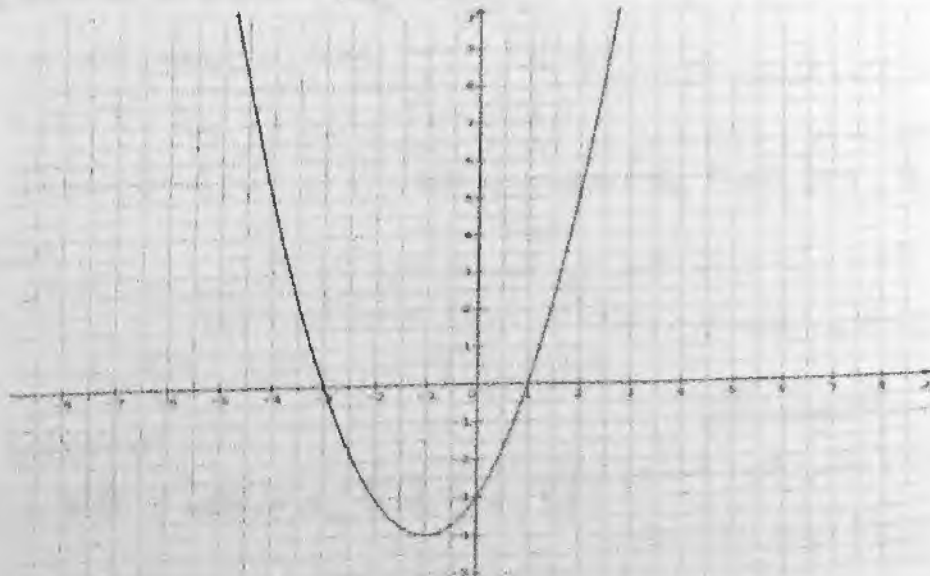
$$f(x) = (3x)^2 - 2(3x)(2) + (2)^2 = (3x-2)^2$$

بما أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $(3x-2)^2 \geq 0$  فإن:  $f(x) + 15 \geq 0$

أي:  $f(x) \geq -15$  وعليه: أصغر قيمة ممكنة للدالة  $f$  هي: (15).

## • حل التمرين (17):

$$\bullet \text{ التمثيل البياني للدالة } f \text{ حيث: } f(x) = x^2 + 2x - 3$$





نلاحظ على الشاشة أن الدالة  $f$  تقبل قيمة حدية صغرى قيمتها  $(-4)$  أي:  $f(x) \geq -4$  \* الإثبات:

$$\text{لدينا: } f(x) + 4 = x^2 + 2x - 3 + 4 = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$$

$$\text{وعليه: } f(x) + 4 \geq 0 \text{ أي: } f(x) \geq -4$$

### حل التمرين (18):

دراسة تغيرات الدالة  $f$  حيث:  $f(x) = -\sqrt{2}(x - \sqrt{2})^2 - 2$

\* دراسة تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; \sqrt{2}]$ :

$x_1$  و  $x_2$  عددان حقيقيان من المجال  $]-\infty; \sqrt{2}]$  حيث:

$$x_1 - \sqrt{2} < x_2 - \sqrt{2} < 0 \text{ وعليه: } x_1 < x_2 < \sqrt{2}$$

أي:  $(x_1 - \sqrt{2})^2 > (x_2 - \sqrt{2})^2$  لأن: الدالة مربع متناقصة على المجال  $]-\infty; 0]$  وعليه:

$$-\sqrt{2}(x_1 - \sqrt{2})^2 < -\sqrt{2}(x_2 - \sqrt{2})^2$$

$$-\sqrt{2}(x_1 - \sqrt{2})^2 - 2 < -\sqrt{2}(x_2 - \sqrt{2})^2 - 2$$

$$\text{أي: } f(x_1) < f(x_2)$$

وعليه الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $]-\infty; \sqrt{2}]$ .

\* دراسة تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[\sqrt{2}; +\infty[$ :

$x_1$  و  $x_2$  عددان حقيقيان من المجال  $[\sqrt{2}; +\infty[$  حيث:

$$0 < x_1 - \sqrt{2} < x_2 - \sqrt{2} \text{ أي: } \sqrt{2} < x_1 < x_2$$

أي:  $(x_1 - \sqrt{2})^2 < (x_2 - \sqrt{2})^2$  لأن: الدالة مربع متزايدة على المجال  $]0; +\infty[$  وعليه:

$$-\sqrt{2}(x_1 - \sqrt{2})^2 > -\sqrt{2}(x_2 - \sqrt{2})^2$$

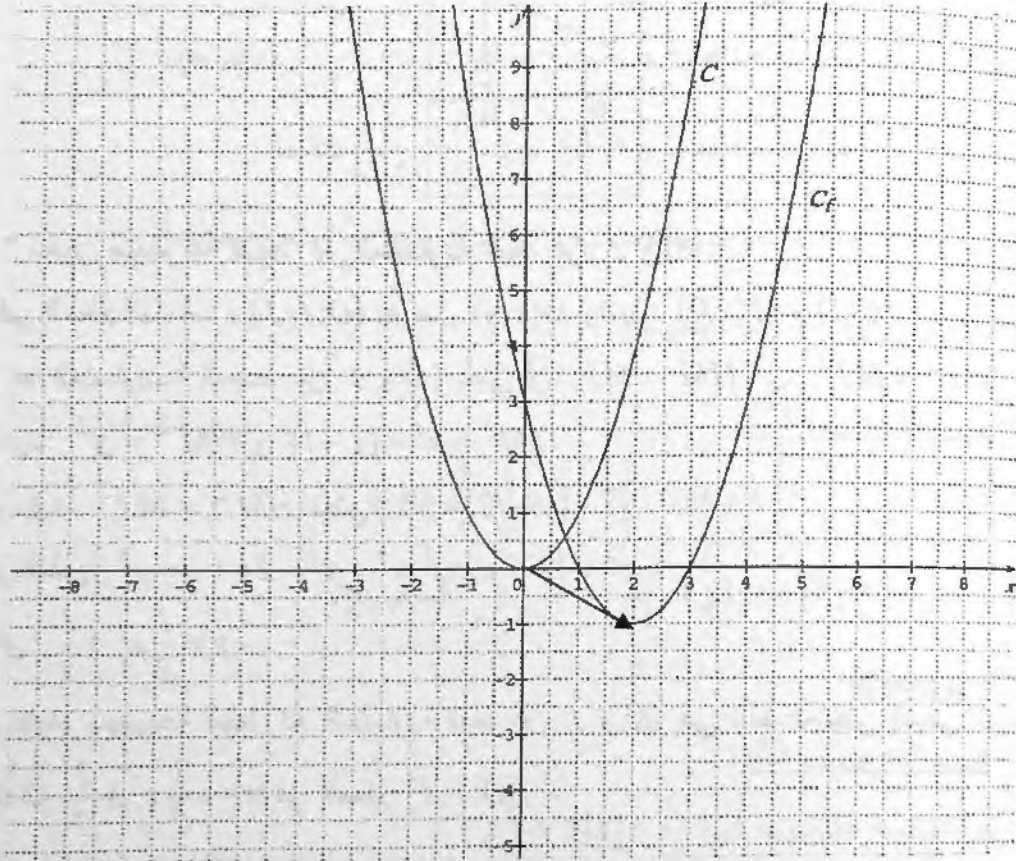
$$-\sqrt{2}(x_1 - \sqrt{2})^2 - 2 > -\sqrt{2}(x_2 - \sqrt{2})^2 - 2$$

$$\text{أي: } f(x_1) > f(x_2)$$

وعليه: الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $[\sqrt{2}; +\infty[$ .

**حل التمرين (19):**

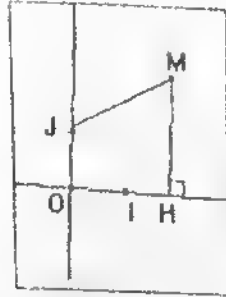
أ/ إنشاء المنحنى (C) الممثل للدالة مربع:

ب/ يمكن إنشاء المنحنى (E) إنطلاقاً من (C) بالإنسحاب الذي شعاعه  $\vec{V}(2; -1)$ لأن: النقطة  $M(x, y)$  تنتمي إلى (E) إذا وفقط إذا كان:  $y = (x-2)^2 - 1$ 

أي:  $y + 1 = (x-2)^2$

النقطة  $M(x-2; y+1)$  تنتمي إلى القطع المكافئ (C) إذن تمر من (C) إلى (E)بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{V}(2; -1)$ .**حل التمرين (20):**J نقطة لا تنتمي إلى المستقيم ( $\Delta$ ) و O هي مسقطها العمودي على ( $\Delta$ ). I هي:نقطة من ( $\Delta$ ) حيث:  $OI = OJ$ .

نعتبر في المعلم المتعامد  $(O; I, J)$  نقطة متغيرة  $M(x, y)$ .



\* تعيين مجموعة النقاط  $M$  المتساوية البعد عن  $J$  و  $(\Delta)$ :

في المعلم المتعامد  $(O; I, J)$  نفرض  $M(x, y)$  ولدينا:  $J(0; 1)$  و  $H(x; 0)$ .

$M$  المتساوية البعد عن  $J$  و  $(\Delta)$  يعني أن:  $HM = MJ$  أي:  $HM^2 = MJ^2$

لدينا:  $HM^2 = y^2$  و  $MJ^2 = x^2 + (y - 1)^2$

وعليه:  $HM^2 = MJ^2$  تعني:  $x^2 + (y - 1)^2 = y^2$

وبالتالي:  $x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2$  أي:  $x^2 + 1 = 2y$

أي:  $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$

وعليه: مجموعة النقاط  $M$  المتساوية البعد عن  $J$  و  $(\Delta)$  هي نقاط المنحنى البياني لـ

للدالة  $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$  في المعلم  $(O; I, J)$ .

✓ الدالة مقلوب:

أصبح أم خطأ:

✓ حل التعريف (21):

(1) مقلوب كل عدد موجب هو عدد سالب. خطأ.

(2) مقلوب عدد حقيقي غير معدوم وأصغر من 7 يكون أكبر من 7. خطأ.

(3) مقلوب  $7 - 4\sqrt{3}$  أكبر من  $7 - 4\sqrt{3}$ . صحيح.

(4) إذا كان:  $x > 5$  فإن:  $\frac{1}{x} < \frac{1}{5}$ . صحيح.

(5)  $a$  و  $b$  عدنان غير معدومان.

(6) إذا كان:  $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$  فإن:  $a < b$  خطأ.

(7) إذا كان:  $x < -5$  فإن:  $\frac{1}{x} > -\frac{1}{5}$  صحيح.

(8) بما أن: الدالة مقلوب متناقصة و  $-6 > -5$  فإن:  $-\frac{1}{6} < -\frac{1}{5}$  صحيح.

(9) بما أن: الدالة مقلوب متناقصة و  $5 > 6$  فإن:  $\frac{1}{-5} < \frac{1}{6}$  خطأ.

(10) بما أن: الدالة مقلوب متناقصة و  $5 > -6$  فإن:  $\frac{1}{5} < -\frac{1}{6}$  خطأ.

(11)  $\frac{1}{x} \leq \frac{2}{11}$  أي:  $\frac{11}{2} \geq 1$  صحيح.

✓ حل التمرين (22):

أ/ إذا كان:  $x \in \left[-\frac{3}{4}, 0\right]$  فإن:  $\frac{1}{x} \in \left[-\frac{4}{3}, 0\right]$  خطأ.

ب/ إذا كان:  $x \in ]0, 8]$  فإن:  $\frac{1}{x} \in \left[\frac{1}{8}, +\infty\right]$  صحيح.

✓ صور وسوابق:

✓ حل التمرين (23):

$f$  هي الدالة مقلوب أي:  $x \mapsto f(x) = \frac{1}{x}$

أ/ حساب صور الأعداد:

$$f(-1) = -1 \quad ; \quad f\left(-\frac{1}{3}\right) = -3$$

$$f(10^{-1}) = \frac{1}{10^{-1}} = 10^1$$

$$f(10^2) = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

$$f\left(\frac{7}{5}\right) = \frac{5}{7} \quad ; \quad f\left(-\frac{7}{5}\right) = -\frac{5}{7}$$

$$f(3) = \frac{1}{3} \quad ; \quad f(-3) = -\frac{1}{3}$$

ب/ حساب السوابق في كل حالة:

لدينا:  $f(x) = -3$  يعني أن:  $x = -\frac{1}{3}$

• في حالة:  $f(x) = 5$  يعني أن:  $x = \frac{1}{5}$

• في حالة:  $f(x) = 10^4$  يعني أن:  $x = 10^{-4}$

• في حالة:  $f(x) = 10^{-4}$  يعني أن:  $x = 10^4$

• في حالة:  $f(x) = \frac{5}{6}$  يعني أن:  $x = \frac{6}{5}$

• في حالة:  $f(x) = -\frac{6}{5}$  يعني أن:  $x = -\frac{6}{5}$

• حل التمرين (24):

$x$	0,4	$10^{-1}$	$\sqrt{2}-1$	1	$\frac{2}{\sqrt{2}}$
$f(x)$	2,5	0,1	$\sqrt{2}+1$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

لا يمكن أن يشكل جدول القيم هذا الدالة مقلوب لأن: مقلوب  $10^{-1}$  هو 10 وليس 0,1.

التمثيل البياني:

• حل التمرين (25):

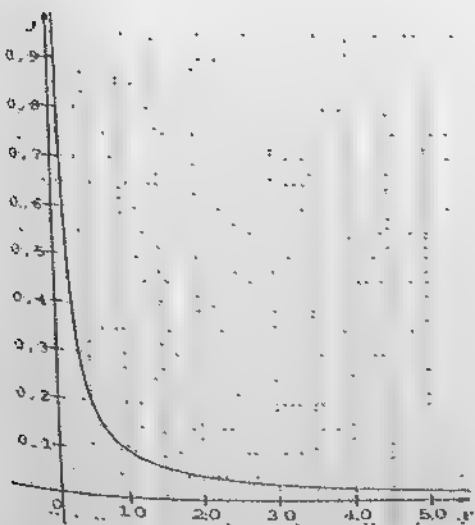
• تمثيل الدالة مقلوب على المجال

$]: 0 ; 50]$

في معلم متعامد حيث: 10 تمثل 1cm

على محور الفواصل و 1 يمثل

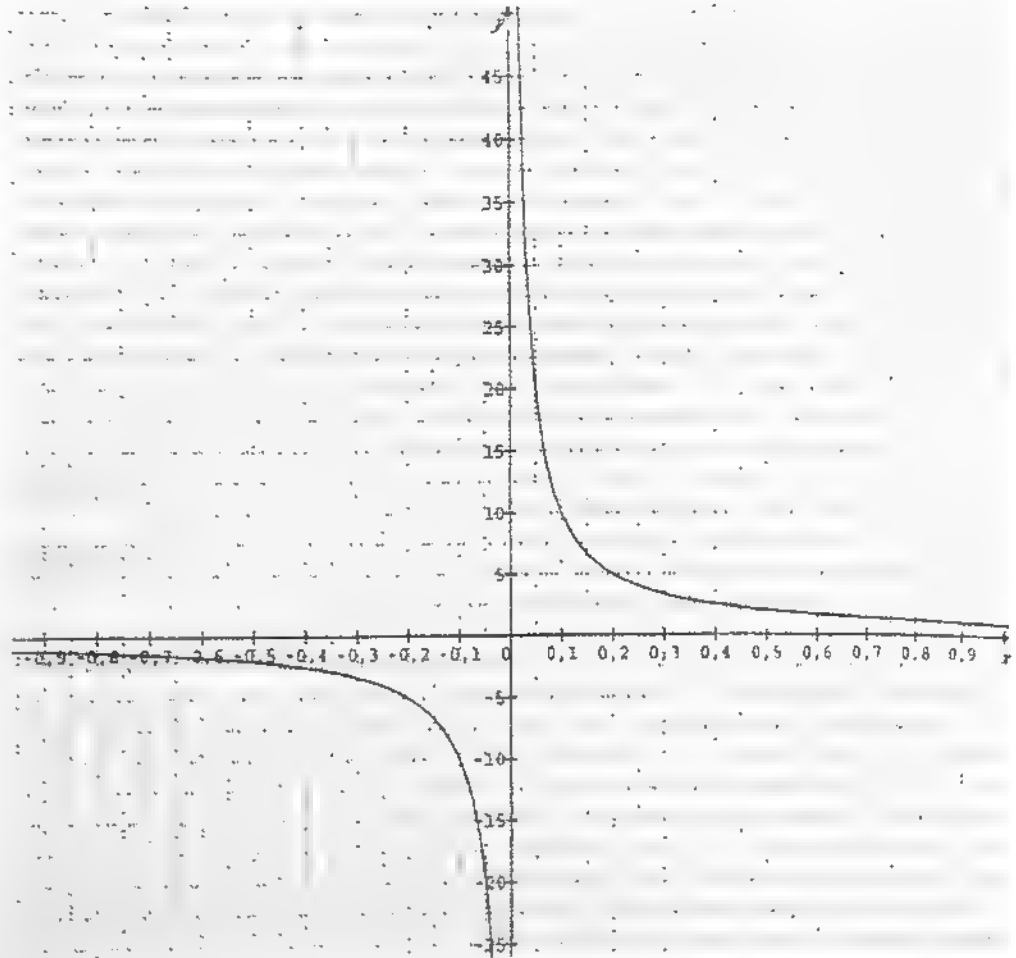
10cm على محور الترتيب.



حل التمرين (26):

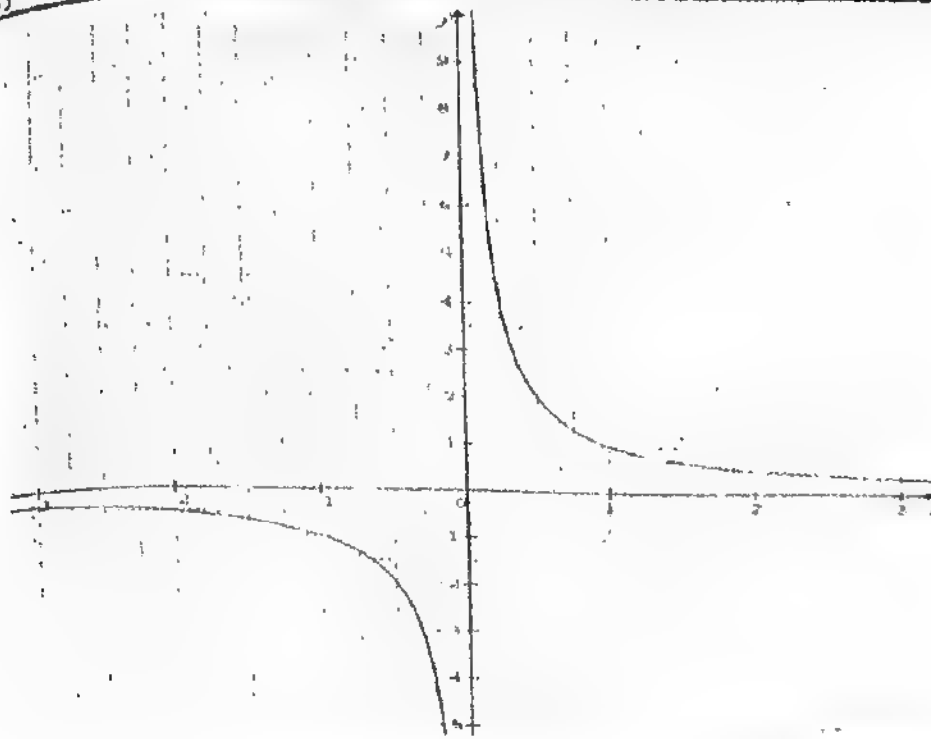
• تمثيل الدالة مقلوب على المجال  $]0 ; 1[ \cup ]1 ; +\infty[$ :

نأخذ  $0,1cm$  لتمثيل 1 على محور الفواصل و  $1cm$  لتمثيل 5 على محور الترتيب.

حل التمرين (27):

• إنشاء المنحنى البياني (C) لدالة مقلوب من أجل  $x \in \left[-3 ; -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2} ; 3\right]$

المنحنى (C) يقبل مركز تناظر وهو المبدأ 0.



• حل التمرين (28):

$f$  الدالة المعرفة على  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{2}{x}$

أ/ دراسة تغيرات الدالة  $f$ :

• أولا على المجال  $]0; +\infty[$ :

$x_1, x_2$  عددا حقيقيين ينتميان إلى المجال  $]0; +\infty[$  حيث:  $x_1 < x_2$

نما أن: الدالة مقلوب متناقصة على:  $]0; +\infty[$  فلن:  $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

بضرب طرفي المتباينة في 2 نجد:  $\frac{2}{x_1} > \frac{2}{x_2}$  أي:  $f(x_1) > f(x_2)$

وعليه: الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]0; +\infty[$ .

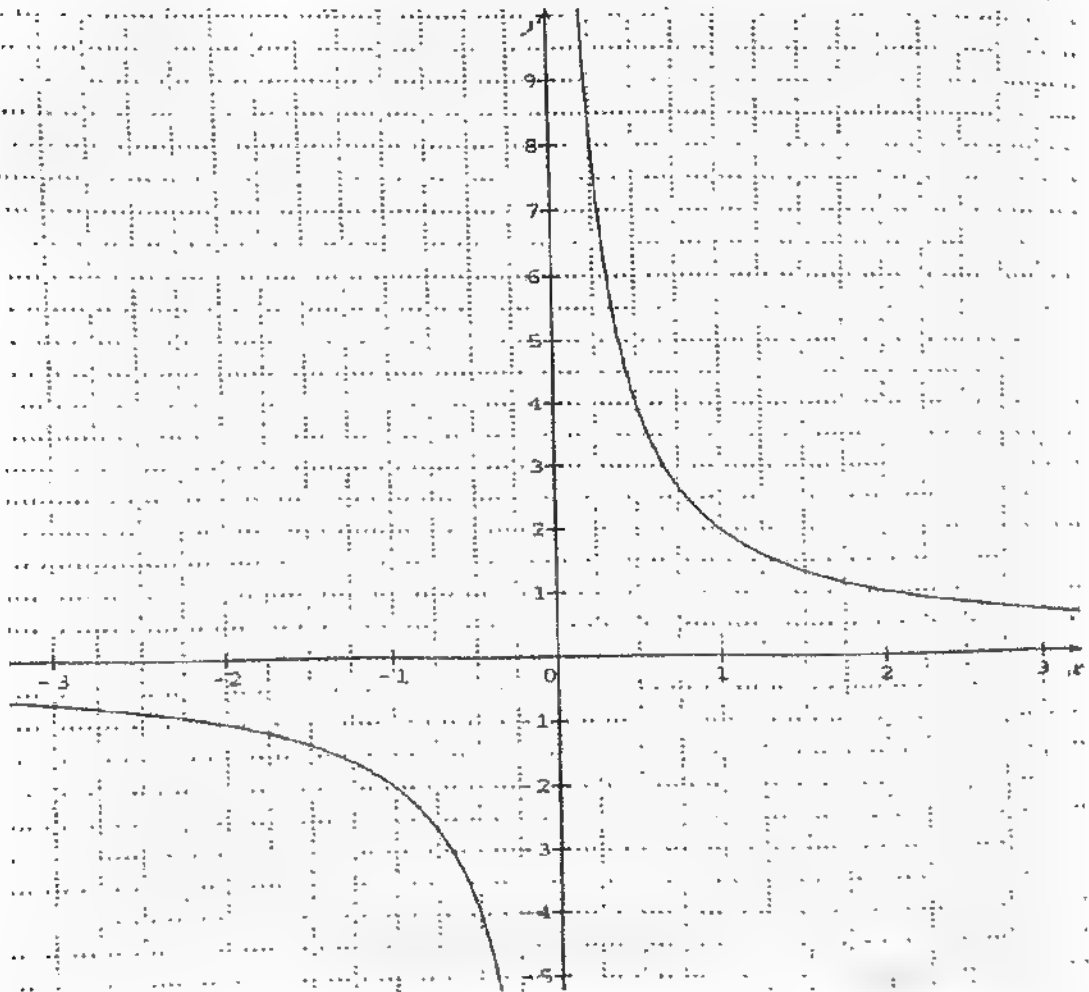
بنفس الطريقة نبرهن أن الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]-\infty; 0[$ .

• جدول تغيرات الدالة  $f$ :



قيم $x$	$-\infty$	0	$+\infty$
تغيرات $f$			

ب/ التمثيل البياني للدالة  $f$  على المجال  $[-3 ; 3]$ :



ج/ حل التعريف (29):

$f$  الدالة المعرفة على  $]-\infty ; 0[ \cup ]0 ; +\infty[$  بـ:  $f(x) = -\frac{3}{x}$

أ/ دراسة تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$ :

$x_1, x_2$  عدنان حقيقيان ينتميان إلى المجال  $]0; +\infty[$  حيث:  $x_1 < x_2$



بما أن الدالة مقلوب متناقصة على المجال  $]0; +\infty[$  فإن:  $\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$

بضرب طرفي المتباينة في العدد  $(-3)$  نجد:  $-\frac{3}{x_1} < -\frac{3}{x_2}$  أي:  $f(x_1) < f(x_2)$

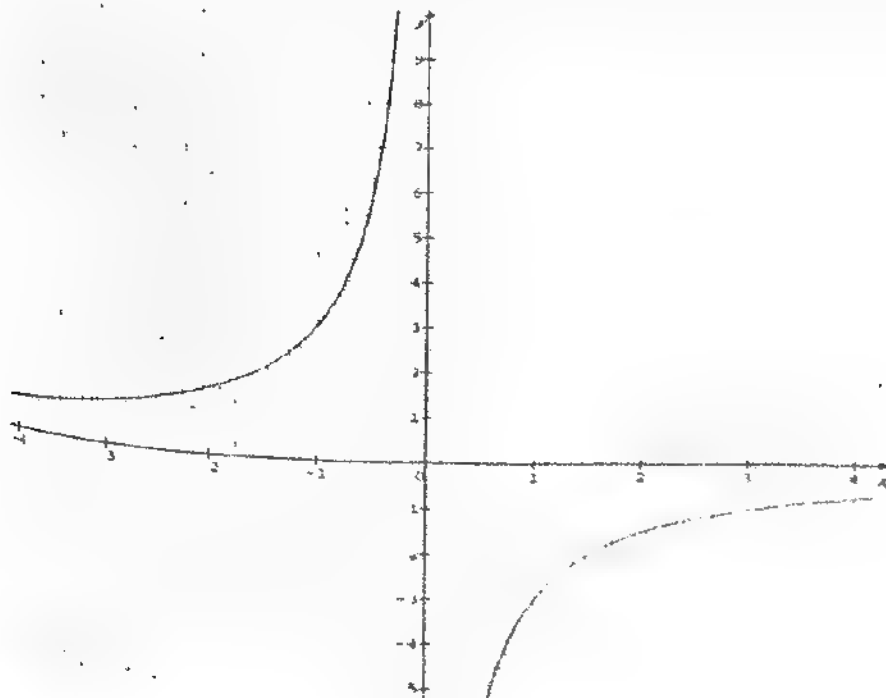
وعليه الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $]0; +\infty[$ .

بنفس الطريقة نبرهن أن الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $]-\infty; 0[$ .

\* جدول تغيرات الدالة  $f$ :

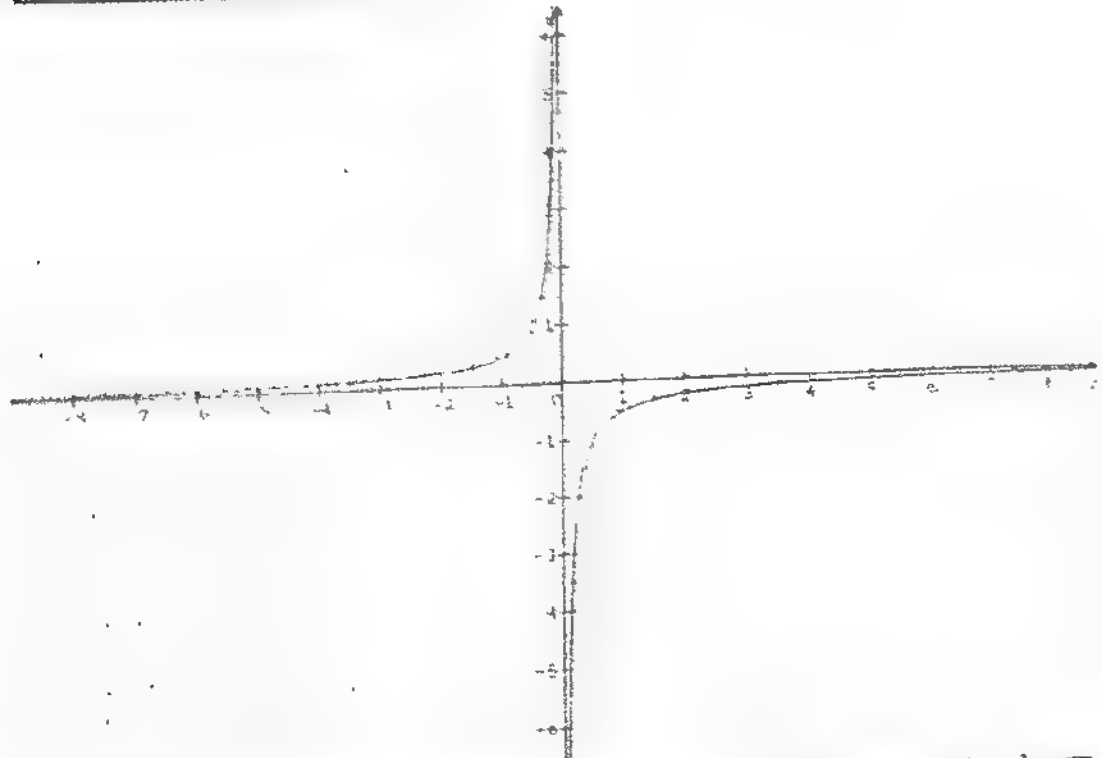
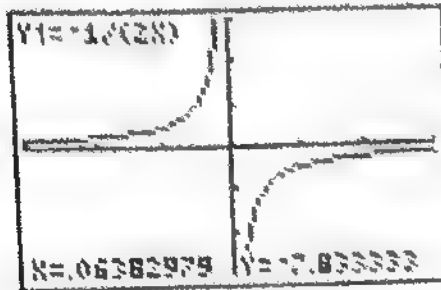
قيم $x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
تغيرات $f$			

ب/ التمثيل البياني للدالة  $f$  على المجال  $[-4; 4]$ :



حل التعريف (30):

• نستعمل الآلة الحاسبة لثباتية لإيجاد مثل  
ننتج المعنى.



حل التعريف (31):

f الدالة المعرفة على  $]-\infty; -2[ \cup ]-2; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{3}{x+2}$

أ) دراسة تغيرات الدالة f:

• أولا على المجال  $]-\infty; -2[$ :

$x_1, x_2$  عدنان حقيقيان ينتميان إلى المجال  $]-\infty; -2[$  حيث:  $x_1 < x_2 < -2$

بإضافة 2 نجد:  $x_1 + 2 < x_2 + 2 < 0$  من جهة أخرى الدالة مقلوب متناقصة على

المجال  $]-\infty; 0[$  وعليه:  $\frac{1}{x_1 + 2} > \frac{1}{x_2 + 2}$

مصر - صر هي التفاضلية في 3 نخذ:  $\frac{3}{x_1+2} > \frac{3}{x_2+2}$  أي:  $f(x_1) > f(x_2)$

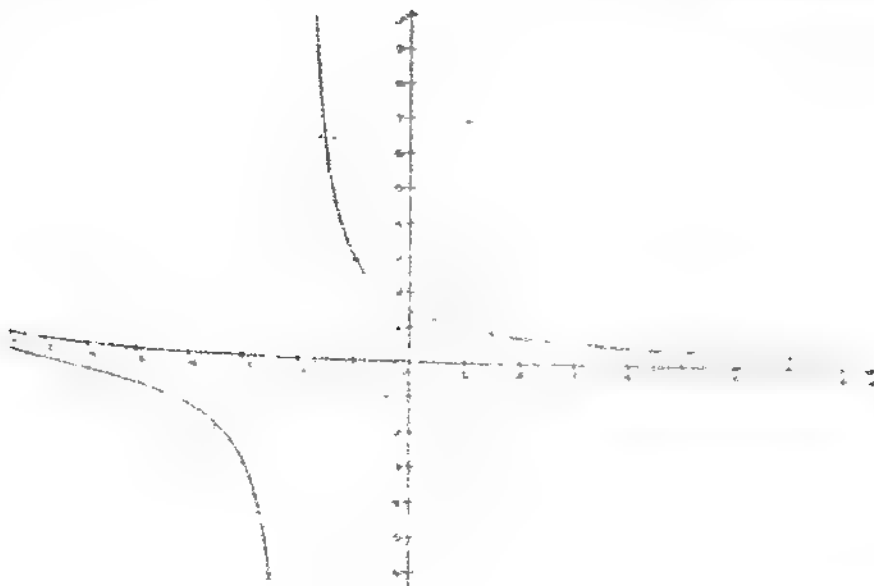
ونجبه لانه  $f$  متناقصة على المجال  $]-\infty; -2]$ .

بمصر تصريفة برهن في الدالة  $f$  متناقصة على المجال  $]-2; +\infty[$ .

\* جدول تغيرات الدالة  $f$ :

قيم $x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
تغيرات $f$			

جد / تمثيل بياني للدالة  $f$ :



من اجل تدوين 132:

$f(x) = \frac{2x+1}{x+1}$  بد:  $]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$  بد:

ا سر هي انه من اجل كل عدد حقيقي  $x$  حيث  $x \neq -1$  يكون:  $f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}$

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1} = \frac{2x+2-1}{x+1}$$

$$f(x) = \frac{2x+2}{x+1} - \frac{1}{x+1} = 2 - \frac{1}{x+1}$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة  $f$  وتشكيل جدول التغيرات:

\* دراسة تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $]-\infty; -1[$ :

$x_1, x_2$  عدنان حقيقيان ينتميان إلى المجال  $]-\infty; -1[$  حيث:  $x_1 < x_2 < -1$   
بإضافة 1 نجد:  $x_1 + 1 < x_2 + 1 < 0$ .

من جهة أخرى الدالة مقلوب متناقصة على المجال  $]0; -\infty[$  يعني:  $\frac{1}{x_1 + 1} > \frac{1}{x_2 + 1}$



بالضرب في  $(-1)$  نجد:  $\frac{-1}{x_1 + 1} < \frac{-1}{x_2 + 1}$  بإضافة العدد 2 نحصل على:

$$f(x_1) < f(x_2) \text{ أي: } 2 - \frac{1}{x_1 + 1} < 2 - \frac{1}{x_2 + 1}$$

وعليه: الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $]-\infty; -1[$ .

بنفس الطريقة نبرهن أن الدالة  $f$  متزايدة على المجال  $]1; +\infty[$ .

\* جدول تغيرات الدالة  $f$ :

قيم $x$	$-\infty$	$-1$	$+\infty$
تغيرات $f$			

حل التمرين 33:

أ/ برهان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $f$  يختلف عن  $(-1)$  يكون:  $f(x) = 3 + \frac{1}{x+1}$

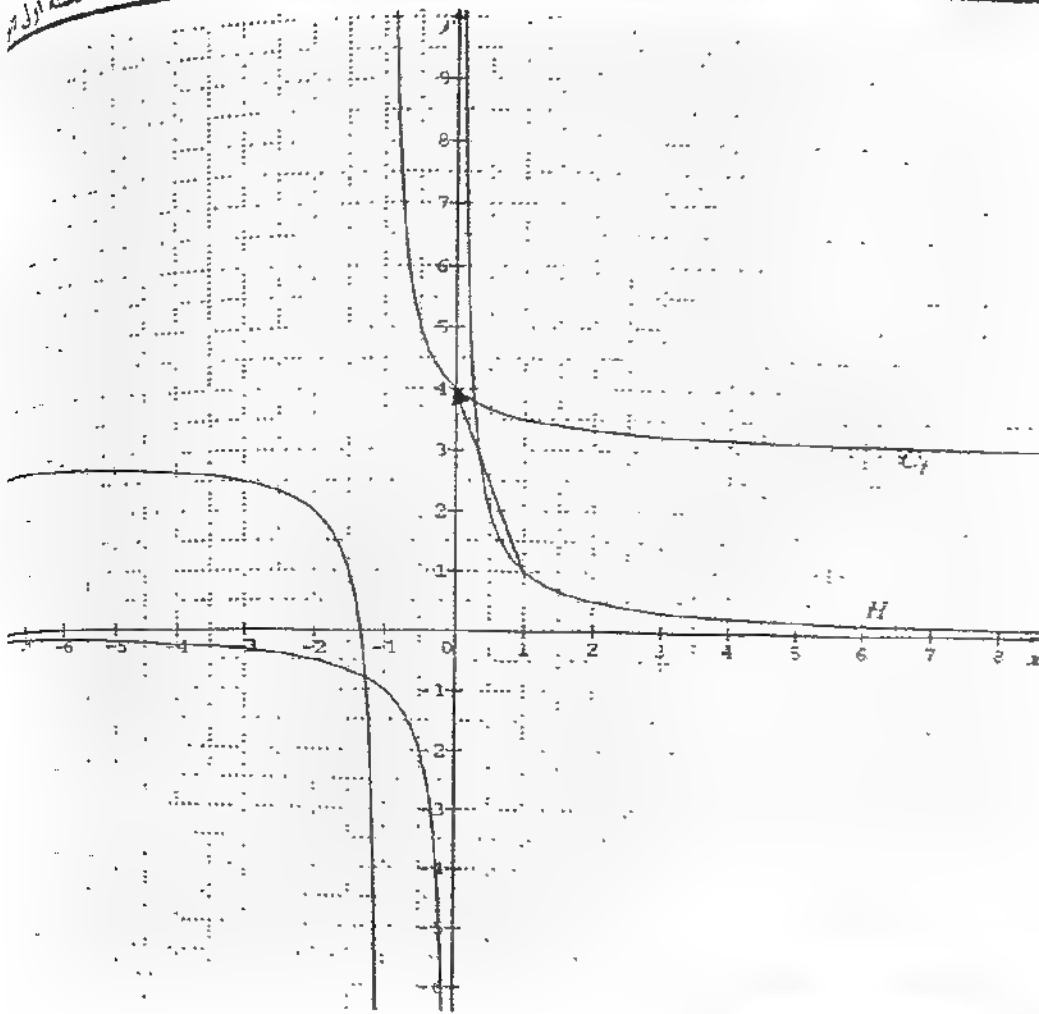
$$\text{لدينا: } f(x) = \frac{3x+4}{x+1} = \frac{3x+3+1}{x+1} = \frac{3x+3}{x+1} + \frac{1}{x+1} = 3 + \frac{1}{x+1}$$

ب/ بيان أنه يمكن استنتاج  $(C)$  انطلاقاً من  $(H)$  بالانسحاب يطلب تعيين شعاعه:

النقطة  $M(x, y)$  نقطة من  $(C)$  فيكون:  $x \neq -1$  و  $y = f(x)$ .

أي:  $y = 3 + \frac{1}{x+1}$  معناه:  $y - 3 = \frac{1}{x+1}$  وبالتالي: النقطة  $M(x+1; y-3)$  تنتمي إلى

القطع المكافئ  $(C)$  إذن تمر من  $(H)$  إلى  $(C)$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{V}(-1; 3)$ .



✓ دالة الجذر التربيعي:

• حل التمرين (34):

أصحح أم خاطئ:

أ/ إذا كان  $x$  عددا حقيقيا حيث  $x < 4$  فإن:  $\sqrt{x} < 2$ . خطأ.

ب/ إذا كان  $0 \leq x \leq 1$  فإن:  $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$ . صحيح.

ج/ من أجل كل عدد حقيقي موجب  $x$  لدينا  $x \geq \sqrt{x}$ . خطأ.

د/ إذا كان  $x^2 \leq 25$  فإن:  $x \leq 5$ . خطأ.

هـ/ إذا كان  $x \in \left[\frac{1}{4}, 4\right]$  فإن:  $x \in \left[\frac{1}{2}, 2\right]$ . صحيح.

حل التمرين 35:

أ/  $x$  عدد سالب، العبارة  $\sqrt{-x}$  ليس لها معنى. خطأ.

ب/ من أجل كل عدد حقيقي لدينا:  $x\sqrt{3} = \sqrt{3x^2}$ . خطأ.

حل التمرين 36:

• إتمام الجدول الآتي:

$x$	1	$(-5)^2$	$\sqrt{\frac{3}{4}}$	$(1-\sqrt{2})$
$\sqrt{x}$	1	5	$\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}}$	$\sqrt{\sqrt{2}-1}$

حل التمرين 37:

$$f(x) = \sqrt{x}$$

أ/ حساب صور الأعداد:

$$(-a-b)^2, 6000^2 + 8000^2, \left(\frac{1}{2} - \pi\right)^2, 10^{-6}$$

$$f(10^{-6}) = \sqrt{10^{-6}} = \sqrt{(10^{-3})^2} = 10^{-3}$$

$$f\left(\left(\frac{1}{2} - \pi\right)^2\right) = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - \pi\right)^2} = \left|\frac{1}{2} - \pi\right| = \pi - \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f(6000^2 + 8000^2) &= \sqrt{6000^2 + 8000^2} = \sqrt{(6 \times 10^3)^2 + (8 \times 10^3)^2} = \sqrt{6^2 \times 10^6 + 8^2 \times 10^6} \\ &= \sqrt{10^6(6^2 + 8^2)} = 10^3 \sqrt{36 + 64} = 10^3 \sqrt{100} \\ &= 10^3 \times 10 = 10^4 = 10000 \end{aligned}$$

$$f((-a-b)^2) = \sqrt{(-a-b)^2} = |-a-b| = |-(a+b)| = |a+b|$$

ب/ حساب موابق الأعداد: 7,  $10^{-6}$ ,  $10^3$ ,  $(-1)^2$ ,  $7 - \sqrt{37}$ .

نضع:  $f(x) = 7$  أي:  $\sqrt{x} = 7$  وعليه:  $x = 49$ .



ومنه: سابقة العدد 7 بالدالة  $f$  هو العدد 49.

نضع:  $f(x) = 10^{-6}$  أي:  $\sqrt{x} = 10^{-3}$  وعليه:  $x = 10^{-12}$ .

ومنه: سابقة العدد  $10^{-6}$  بالدالة  $f$  هو العدد  $10^{-12}$ .

نضع:  $f(x) = 10^3$  أي:  $\sqrt{x} = 10^3$  وعليه:  $x = 10^6$ .

ومنه: سابقة العدد  $10^3$  بالدالة  $f$  هو العدد  $10^6$ .

نضع:  $f(x) = (-1)^2$  أي:  $\sqrt{x} = (-1)^2$  وبالتالي:  $\sqrt{x} = 1$  وعليه  $x = 1$ .

ومنه: سابقة العدد  $(-1)^2$  بالدالة  $f$  هو العدد 1.

نضع:  $f(x) = 7 - \sqrt{37}$  أي:  $\sqrt{x} = 7 - \sqrt{37}$  وبالتالي:

$$x = (7 - \sqrt{37})^2$$

$$x = 49 + 37 - 14\sqrt{37}$$

$$x = 86 - 14\sqrt{37}$$

ومنه: سابقة العدد  $7 - \sqrt{37}$  بالدالة  $f$  هو العدد:  $86 - 14\sqrt{37}$ .

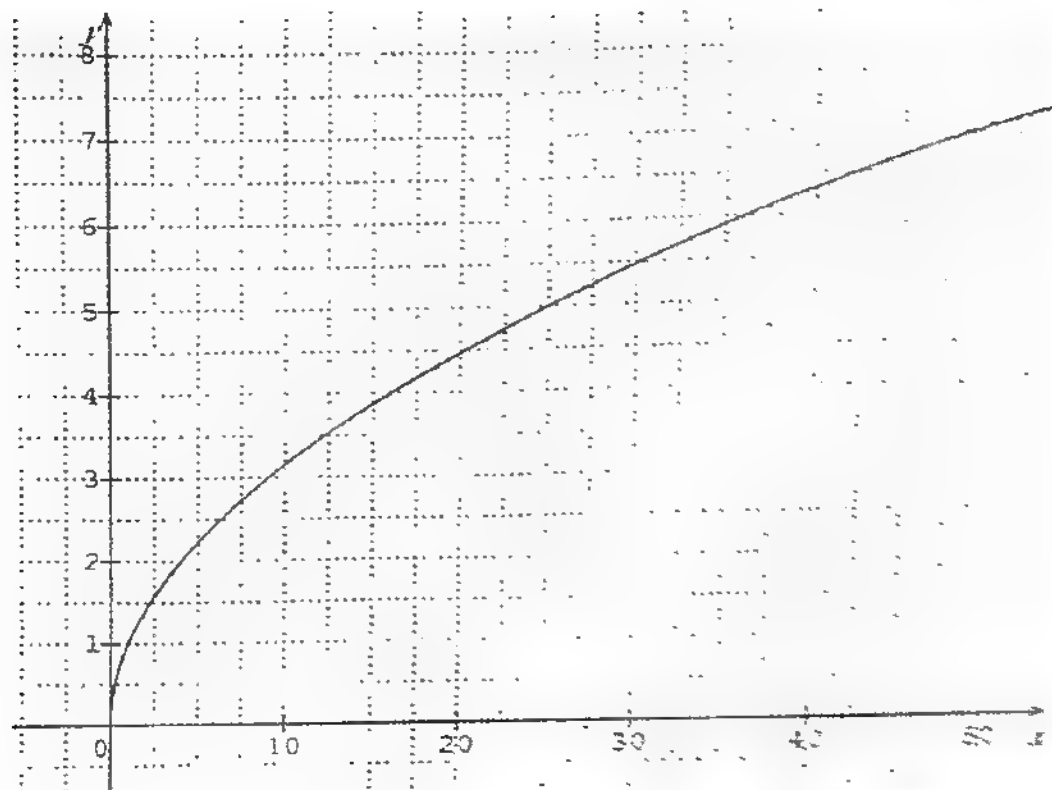
### حل التمرين (38):

تمثيل بيانيا على المجال  $[0; 50]$  دالة "الجذر التربيعي" في معلم متعامد حيث:

10 تمثل 2cm على محور الفواصل و 1 يمثل 1cm على محور الترتيب.

\* جدول بعض القيم:

$x$	0	1	4	9	16	25	36	49
$\sqrt{x}$	0	1	2	3	4	5	6	7



### حل التمرين 39:

• في حالة المعرفة على  $[0; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \sqrt{2x}$ .

ندرس تغيرات الدالة:

• من حيث أن  $x_1, x_2$  من  $[0; +\infty[$  حيث:  $x_1 < x_2$

، فلهذا  $2x_1 < 2x_2$  أي  $\sqrt{2x_1} < \sqrt{2x_2}$

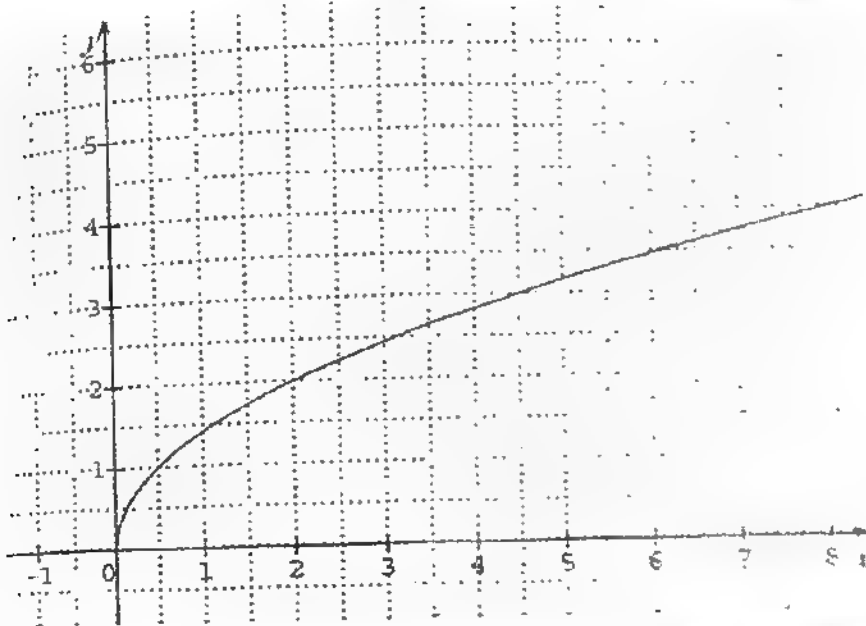
، نحصل على  $f(x_1) < f(x_2)$

، أي: متزايدة تمامًا على  $[0; +\infty[$ .

• جدول تغيرات:

$x$	0	$+\infty$
$f(x)$	0	$\nearrow$

المسند الأول



40 \_\_\_\_\_

هي الدالة المعرفة على  $]-\infty; 0]$  بـ:  $f(x) = \sqrt{-2x}$ .

## دراسة تجزئة

۱. ۱ میں  $\{x_1, x_2\}$  جہاں:  $x_1 < x_2$

$$-x_1 > -x_2$$

$$-2x_1 > -2x_2$$

$$\sqrt{-2x_1} > \sqrt{-2x_2}$$

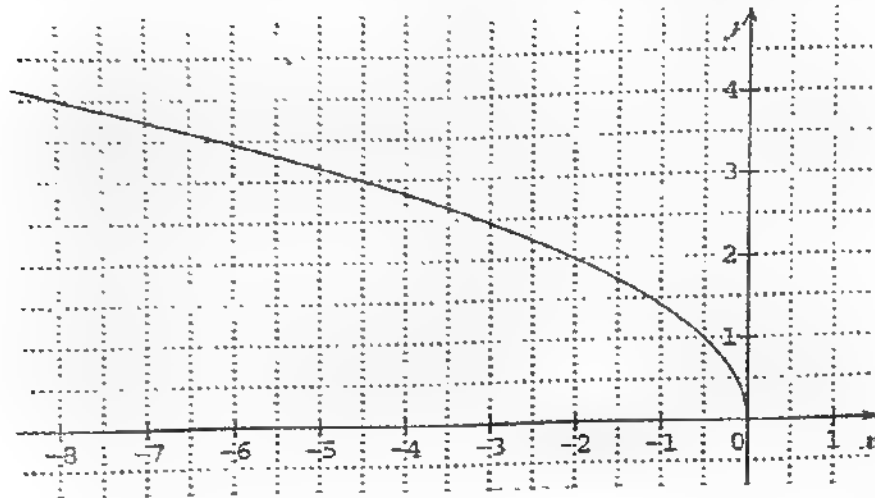
$$f(x_1) > f(x_2)$$

موضوع: مناقشة دور علي بن أبي طالب في الإسلام.

7. 1. 1991



ب/ التمثيل البياني للدالة  $f$  على المجال  $[-8; 0]$ :



ط- حل التعريف (41):

(C) هو التمثيل البياني للدالة  $f$  المعرفة على  $[-2; +\infty[$  بـ:  $f(x) = 1 + \sqrt{x+2}$

و (H) هو التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي.

أ/ دراسة تغيرات  $f$ :

من أجل كل  $x_1, x_2$  من  $[-2; +\infty[$  حيث:  $x_1 < x_2$

أي:  $x_1 + 2 < x_2 + 2$  وعليه:  $\sqrt{x_1 + 2} < \sqrt{x_2 + 2}$

$$1 + \sqrt{x_1 + 2} < 1 + \sqrt{x_2 + 2}$$

$$f(x_1) < f(x_2)$$

ومنه:  $f$  متزايدة تماما على  $[-2; +\infty[$

\* جدول تغيرات  $f$ :

$x$	-2	$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$

ب/ لدينا:  $f(x) = 1 + \sqrt{x+2}$

$$y = 1 + \sqrt{x+2}$$

$$y - 1 = \sqrt{x+2}$$

بوضع:  $\begin{cases} y' = y - 1 \\ x' = x + 2 \end{cases}$  فإن:  $y = \sqrt{x}$

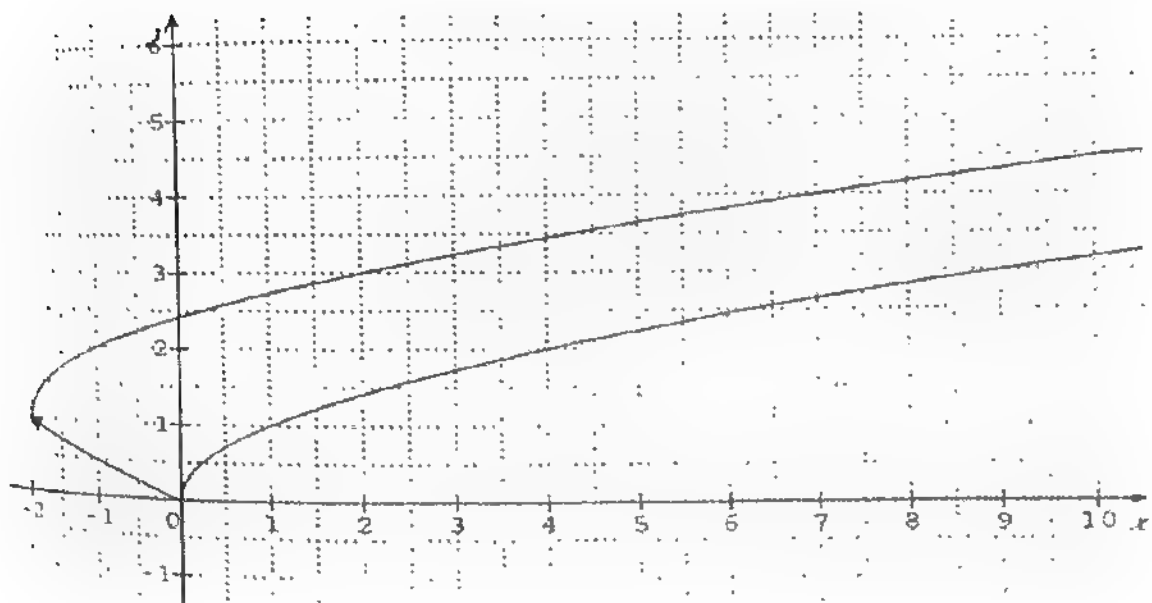
لتكن:  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  نقطة من منحنى الدالة جذر التربيعي (H).

فإن:  $M \begin{pmatrix} x+2 \\ y-1 \end{pmatrix}$  نقطة من المنحنى (H).

لتكن:  $M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  نقطة من المنحنى (C).

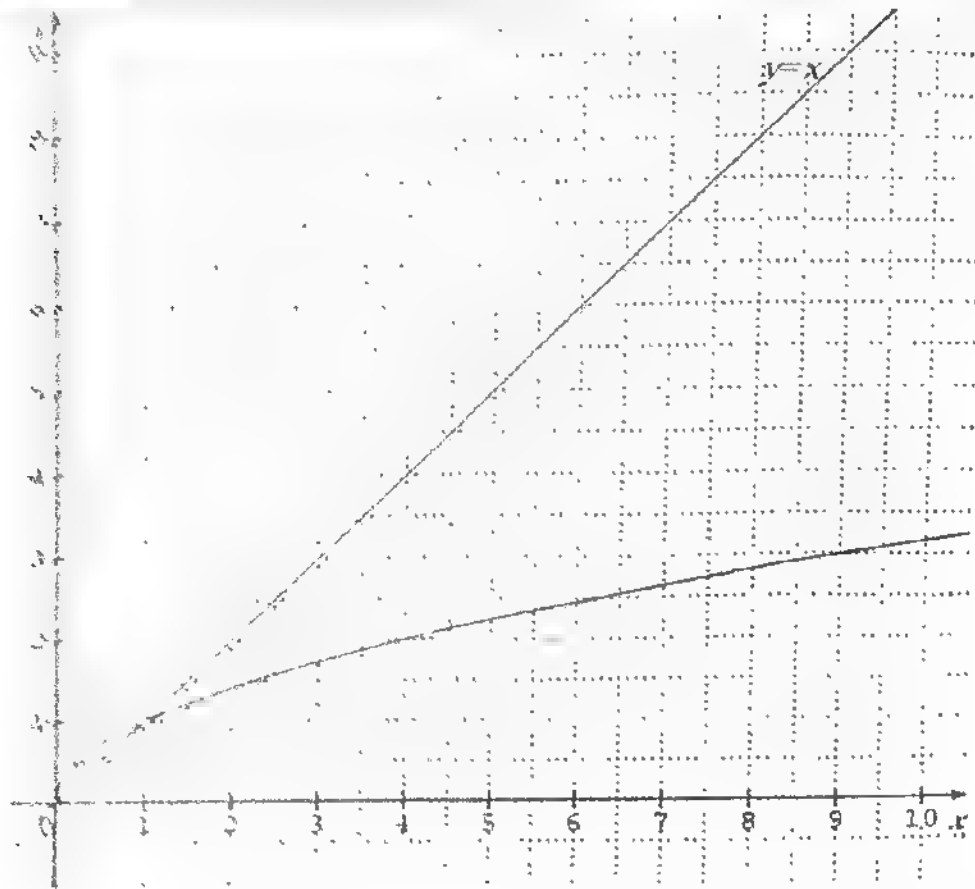
لن: نمر من (H) إلى (C) بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{P} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

• إنشاء (C):



• حل التمرين 42:

أ/ تمثيل على المجال  $[0; +\infty[$  الدالتين:  $x \xrightarrow{f} \sqrt{x}$  و  $x \xrightarrow{g} x$



ب/ التخمين:

- $(C_f)$  يقع فوق  $(C_g)$  لما  $x \in [1; +\infty[$  ومنه:  $x \geq \sqrt{x}$ .
- $(C_f)$  يقع تحت  $(C_g)$  لما  $x \in [0; 1]$  ومنه:  $x \geq \sqrt{x}$ .

\* البرهان:

$$x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) : x \in [0; 1]$$

وبما أن:  $0 \leq x \leq 1$  فإن:  $0 \leq \sqrt{x} \leq 1$  ومنه:  $\sqrt{x} - 1 \leq 0$

ومنه:  $x - \sqrt{x} \leq 0$  ومنه:  $x \leq \sqrt{x}$ .

$$x - \sqrt{x} = \sqrt{x}(\sqrt{x} - 1) : x \in [1; +\infty[$$

$$x \geq 1$$

وبما أن:  $\sqrt{x} \geq 1$

$$\sqrt{x} - 1 \geq 0$$

ومنه:  $x - \sqrt{x} \geq 0$  ومنه:  $x \geq 1$ .

✓ الذات الثاني جيب تمام وجيب:

أصح أم خطأ:

✓ حل التمرين (34):

لا يوجد أي عدد حقيقي  $x$  حيث:  $\cos x = \frac{\sqrt{5}}{2}$  (صحيح) لأن:  $\frac{\sqrt{5}}{2} > 1$  ومعلوم

من أجل كل  $x$  من  $R$ :  $-1 \leq \cos x \leq 1$ .

✓ حل التمرين (44):

إذا كان  $a < b$  فإن:  $\cos a < \cos b$  و  $\sin a < \sin b$  (خطأ).

✓ حل التمرين (45):

•  $\cos \frac{\pi}{7} > \cos \frac{\pi}{5}$  (صحيح).

•  $\sin \frac{\pi}{7} > \sin \frac{\pi}{5}$  (خطأ).

✓ حل التمرين (46):

$a$  و  $b$  عنصران من المجال  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

أ/ إذا كان:  $a < b$  فإن:  $\cos \frac{1}{a} < \cos \frac{1}{b}$  خطأ.

ب/ إذا كان:  $a < b$  فإن:  $\sin \frac{1}{a} > \sin \frac{1}{b}$  خطأ.

✓ حل التمرين (47):

بما أن  $A$  و  $B$  نقطتان من دائرة مركزها  $O$  ونصف قطرها  $1\text{cm}$  و  $\angle AOB = 10^\circ$  فإن طول القوس  $AB$  هو  $10\text{cm}$ . (خطأ).

✓ حل التمرين (48):

• تعيين  $\hat{AOB}$  بالراديان:



لدينا طول القوس  $\widehat{AB}$  هو  $I = 2,5 \text{ cm}$  ونعلم أن:  $I = a \times r$  حيث  $a$  قياسا بالراديان للزاوية  $\widehat{AOB}$  و  $r$  نصف قطر الدائرة، ومنه:  $a \times 5 = 2,5$  يكافئ  $a = \frac{2,5}{5}$  معناه  $a = 0,5$ .

وعليه:  $\widehat{AOB} = 0,5 \text{ rad}$

• تعيين  $\widehat{AOB}$  بالدرجة:

0,5	$\pi$	الراديان
$x$	180	الدرجة

باستعمال جدول التناسيبية نجد:  $x = \frac{180}{\pi} \times 0,5$  أي:  $x = \frac{90}{\pi}$  وعليه:  $\widehat{AOB}$  بالدرجة هي:  $\frac{90}{\pi}$ .

• حل التمرين (49):

• طول القوس التي تحصرها الزاوية المركزية التي قياسها  $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$  هو:  $I_1 = \frac{\pi}{4} \times 10 \text{ cm}$ .

• طول القوس التي تحصرها الزاوية المركزية التي قياسها  $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$  هو:

$$I_2 = \frac{\pi}{4} \times 10 = \frac{5\pi}{2} \text{ cm}$$

• طول القوس التي تحصرها الزاوية المركزية التي قياسها  $\frac{\pi}{4} \text{ rad}$  هو:

$$I_3 = \frac{3\pi}{4} \times 10 = \frac{15\pi}{2} \text{ cm}$$

لحساب أطوال الأقواس التي تحصرها الزوايا المركزية التي أقياسها  $120^\circ$ ,  $75^\circ$ ,  $90^\circ$  نحول الأقياس من الدرجة إلى الراديان.

$z$	$y$	$x$	$\pi$	الراديان
120	75	90	180	الدرجة

بإستعمال جدول التناسبية نجد:  $x = \frac{\pi}{2}$  ،  $y = \frac{5\pi}{12}$  ،  $z = \frac{2\pi}{3}$  ومنه:

• طول القوس التي تحصرها الزاوية المركزية التي قياسها  $90^\circ$  أي:  $\frac{\pi}{2} \text{ rad}$

$$.I_4 = \frac{\pi}{2} \times 10 = 5\pi \text{ cm}$$

• طول القوس التي تحصرها الزاوية المركزية التي قياسها  $75^\circ$  أي:  $\frac{5\pi}{12} \text{ rad}$

$$.I_5 = \frac{\pi}{2} \times 10 = \frac{25\pi}{6} \text{ cm}$$

• طول القوس التي تحصرها الزاوية المركزية التي قياسها  $120^\circ$  أي  $\frac{2\pi}{3} \text{ rad}$

$$.I_6 = \frac{2\pi}{3} \times 10 = \frac{20\pi}{3} \text{ cm}$$

### حل التمرين (50):

أ/ تحويل إلى الرديان:  $10^\circ$  ،  $35^\circ$  ،  $150^\circ$

لدينا:  $180^\circ \rightarrow \pi \text{ rad}$

$$10^\circ \rightarrow \varphi \text{ rad}$$

$$\varphi = \frac{10 \times \pi}{180} = \frac{\pi}{18} \text{ rad}$$

لدينا:  $360^\circ \rightarrow 2\pi \text{ rad}$

$$35^\circ \rightarrow \varphi \text{ rad}$$

$$\varphi = \frac{35 \times 2\pi}{360^\circ} = \frac{7}{56} \pi \text{ rad}$$

لدينا:  $360^\circ \rightarrow 2\pi \text{ rad}$

$$150^\circ \rightarrow \varphi \text{ rad}$$

$$\varphi = \frac{150 \times 2\pi}{360^\circ} = \frac{5}{6} \pi \text{ rad}$$

ب/ تحويل إلى الدرجة:

$$\frac{\pi}{5} \text{ rad} , \frac{3\pi}{8} \text{ rad}$$

لدينا:

$$180^\circ \rightarrow \pi \text{ rad}$$

$$\varphi \leftarrow \frac{3\pi}{8} \text{ rad}$$

$$\varphi = \frac{180 \times \frac{3\pi}{8}}{\pi} = \frac{135}{2} = 67.5^\circ$$

لدينا:

$$180^\circ \rightarrow \pi \text{ rad}$$

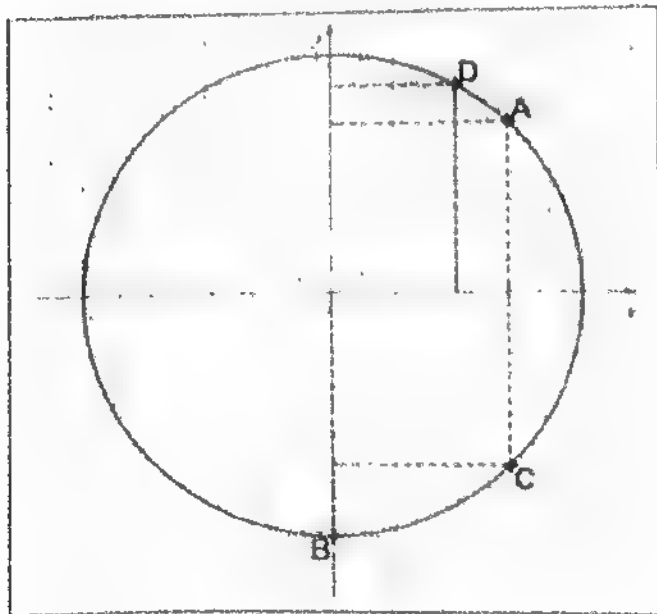
$$\varphi \rightarrow \frac{\pi}{5} \text{ rad}$$

$$\varphi = \frac{180 \times \frac{\pi}{5}}{\pi} = 36^\circ$$

حل التمرين 51:

تمثيل على الدائرة المثلثية النقط  $A, B, C, D$  صور الأعداد الحقيقية:

على الترتيب:  $\frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}, -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}$



## حل التمرين (52):

\* حساب القيم المضبوطة لجيب تمام وجيب الأعداد الآتية:

$$\begin{cases} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{5\pi}{6} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos \frac{5\pi}{6} = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{7\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \cos \frac{7\pi}{6} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -\sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = \cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{-7\pi}{6}\right) = -\sin \frac{7\pi}{6} = \frac{1}{2} \\ \cos\left(\frac{-7\pi}{6}\right) = -\cos \frac{7\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin \frac{4\pi}{3} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{4\pi}{3} = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos \frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin 120\pi &= \sin 0 = 0 \\ \cos 120\pi &= \cos 0 = 1 \\ \sin 213\pi &= \sin \pi = 0 \\ \cos 213\pi &= \cos \pi = -1 \\ \sin(-128\pi) &= \sin 0 = 0 \\ \cos(-128\pi) &= \cos 0 = 1 \\ \sin(-789\pi) &= \sin(-\pi) = -\sin \pi = 0 \\ \cos(-789\pi) &= \cos(-\pi) = -\cos \pi = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin \frac{193\pi}{3} &= \sin \left( 64\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{193\pi}{3} &= \cos \left( 64\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \sin \frac{-193\pi}{3} &= -\sin \frac{193\pi}{3} = -\sin \frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos \frac{-193\pi}{3} &= \cos \frac{193\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \sin \frac{115\pi}{4} &= \sin \left( 29\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{115\pi}{4} &= \cos \left( 29\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \cos \left( \pi - \frac{\pi}{4} \right) = -\cos \frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \frac{-115\pi}{4} &= -\sin \frac{115\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos \frac{-115\pi}{4} &= \cos \frac{115\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

المسألة الأولى الأولى

تعيين في كل حالة من الحالات الآتية العدد  $\tau$  من المجال  $[0, \pi]$ :

- $\cos x = 0$  و  $x \in [0; \pi]$  ومنه:  $x = \frac{\pi}{2}$ .
- $\sin x = \frac{1}{2}$  و  $x \in [0; \pi]$  ومنه:  $x = \frac{\pi}{6}$  أو:  $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ .
- $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  و  $x \in [0; \pi]$  ومنه:  $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ .
- $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$  و  $x \in [0; \pi]$  بما أن:  $\sin x > 0$  لما  $x \in [0; \pi]$  فإنه لا توجد قيمة لـ  $x$  من المجال  $[0; \pi]$  تحقق  $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ .
- $\cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$  و  $x \in [0; \pi]$  ومنه:  $x = \frac{\pi}{4}$ .

#### حل التمرين (4):

- تعيين في كل حالة من الحالات الآتية العدد  $x$  من المجال  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ :

- $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$  و  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  ومنه:  $x = \frac{\pi}{3}$ .
- $\cos x = \frac{1}{2}$  و  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  ومنه:  $x = \frac{\pi}{3}$  أو:  $x = -\frac{\pi}{3}$ .
- $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$  و  $x \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  ومنه:  $x = -\frac{\pi}{4}$ .

#### حل التمرين (5):

- أ /  $x$  عنصر من  $[\frac{\pi}{2}; \pi]$  حيث:  $\sin x = \frac{2}{3}$ :

• حساب  $\cos x$ :

نبتة:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  وعليه:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{4}{9}$$

ب-  $x$  متغير عن  $\left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right]$  :  $\cos x = -\frac{3}{5}$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \right\} : \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{9}{25}$$

$$x \text{ يتغير من } [-\pi, \pi] \text{ حيث: } \sin x = -\frac{1}{2}$$

حسيني ٥٥٨٤

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{1}{9}$$

$$\cos^2 x = \frac{8}{9} \begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{8}}{3} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (مقبول)} \\ \text{أو} \\ \cos x = -\frac{\sqrt{8}}{3} = -\frac{2\sqrt{2}}{3} \text{ (مقبول)} \end{cases}$$

### حل التمرين (56):

أ/ تعيين الأعداد الحقيقية  $x$  من  $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$  حيث:  $\cos x \geq 0$  نعلم أن:

المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, I, J)$  صورنا العددين  $\frac{\pi}{2}$  و  $\frac{3\pi}{2}$  على الترتيب حسب

$$\cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

نلاحظ أن  $J'$  هي أيضا صورة لـ  $-\frac{\pi}{2}$  ومنه يكون  $\cos x \geq 0$  إذا وفقط إذا كانت صور

الأعداد  $x$  على الدائرة المثلثية  $(C)$  تنتمي إلى  $J'J$  أي  $x$  عدد من  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$ .

$$\text{وعليه: } S = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]$$

ب/ تعيين الأعداد الحقيقية  $x$  من  $[-2\pi; 3\pi]$  حيث:  $\sin x \leq \frac{1}{2}$

نعلم أن:  $\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$  ومنه توجد نقطتان  $A$  و  $B$  من الدائرة المثلثية  $(C)$  المعلم

المعلم المتعامد والمتجانس  $(O, I, J)$  صورنا العددين  $\frac{\pi}{6}$  و  $\frac{5\pi}{6}$  على الترتيب حسب

$$\sin \frac{\pi}{6} = \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{أي } \frac{13\pi}{6}, \frac{-11\pi}{6} \text{ و } B \text{ صورة للأعداد } -2\pi + \frac{5\pi}{6}, 2\pi + \frac{5\pi}{6} \text{ أي: } \frac{17\pi}{6}, \frac{-7\pi}{6}$$

ومنه: يكون  $\sin x \leq \frac{1}{2}$  إذا وفقط إذا كانت صور الأعداد  $x$  على الدائرة المثلثية  $(C)$



نسعى إلى القوس  $AB$  أي  $x$  عدد من  $\left[ \frac{17\pi}{6}, 3\pi \right] \cup \left[ \frac{5\pi}{6}, \frac{13\pi}{6} \right] \cup \left[ \frac{-7\pi}{6}, \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[ 2\pi, \frac{11\pi}{6} \right]$  وعليه:

### حل التمرين 57:

1) دراسة تغيرات الدالة  $\cos x$  على  $[0 ; 2\pi]$ :

• على المجال  $[0 ; \pi]$ :

من أجل كل  $x_1, x_2$  من  $[0 ; \pi]$  حيث:  $x_1 < x_2$

فإن:  $\cos x_1 > \cos x_2$

ومنه: الدالة  $\cos$  متناقصة تماما على المجال  $[0 ; \pi]$ .

على المجال  $[\pi ; 2\pi]$  من أجل كل  $x_1, x_2$  من  $\left[ \pi ; \frac{3\pi}{2} \right]$  حيث:  $x_1 < x_2$

فإن:  $\cos x_1 < \cos x_2$

ومنه: الدالة  $\cos$  متزايدة تماما على المجال  $\left[ \pi ; \frac{3\pi}{2} \right]$ .

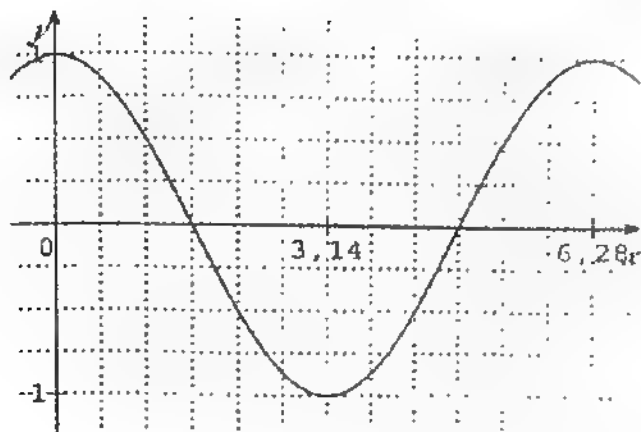
على المجال  $\left[ \frac{3\pi}{2} ; 2\pi \right]$  من أجل كل  $x_1, x_2$  من  $\left[ \frac{3\pi}{2} ; 2\pi \right]$  حيث:  $x_1 < x_2$

فإن:  $\cos x_1 < \cos x_2$ .

ومنه: الدالة  $\cos$  متزايدة تماما على المجال  $\left[ \frac{3\pi}{2} ; 2\pi \right]$

• جدول تغيرات  $\cos$  على  $[0 ; 2\pi]$ :

$x$	0	$\frac{\pi}{2}$	$\pi$	$\frac{3\pi}{2}$	$2\pi$
$\cos$	1		-1		1

• التمثيل البياني للدالة  $\cos$ :

## • استنتاج حلول كل معادلة من المعادلات الآتية:

$$\cos x = -1, \cos x = 1, \cos x = 0$$

• ثم استنتاج كذلك عدد حلول المعادلة  $\cos x = -\frac{5}{7}$

من خلال البيان:  $\cos x = 0$  من أجل:  $x = \frac{\pi}{2}$  أو  $x = \frac{3\pi}{2}$  ،  $S = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right\}$

$\cos x = 1$  من أجل:  $x = 0$  أو  $x = 2\pi$  ،  $x = \{0 ; 2\pi\}$

$\cos x = -1$  من أجل:  $x = \pi$  ،  $S = \{\pi\}$

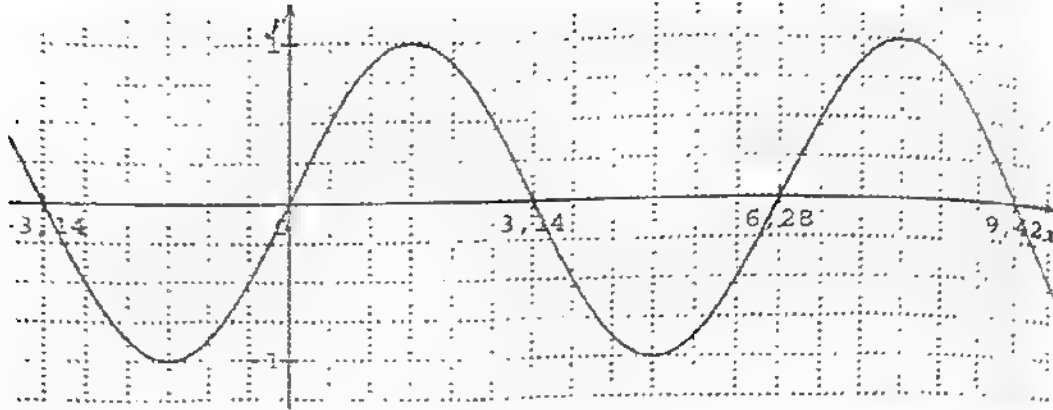
ولدينا عدد حلول المعادلة  $\cos x = \frac{5}{7}$  هما حلان مختلفان.

## • حل التمرين 58:

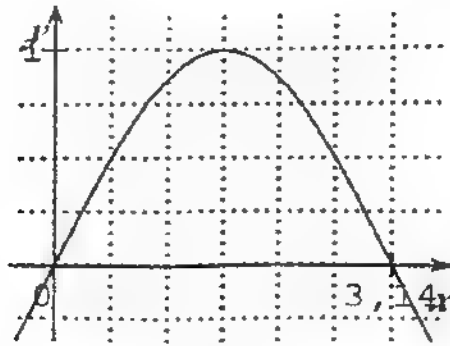
• دراسة تغيرات الدالة  $\sin$  على المجال  $[-\pi ; 3\pi]$ :

$x$	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$	$3\pi$
$\sin$	0	-1	1	-1	1	0

• التمثيل البياني:



• حل التعريف (59):

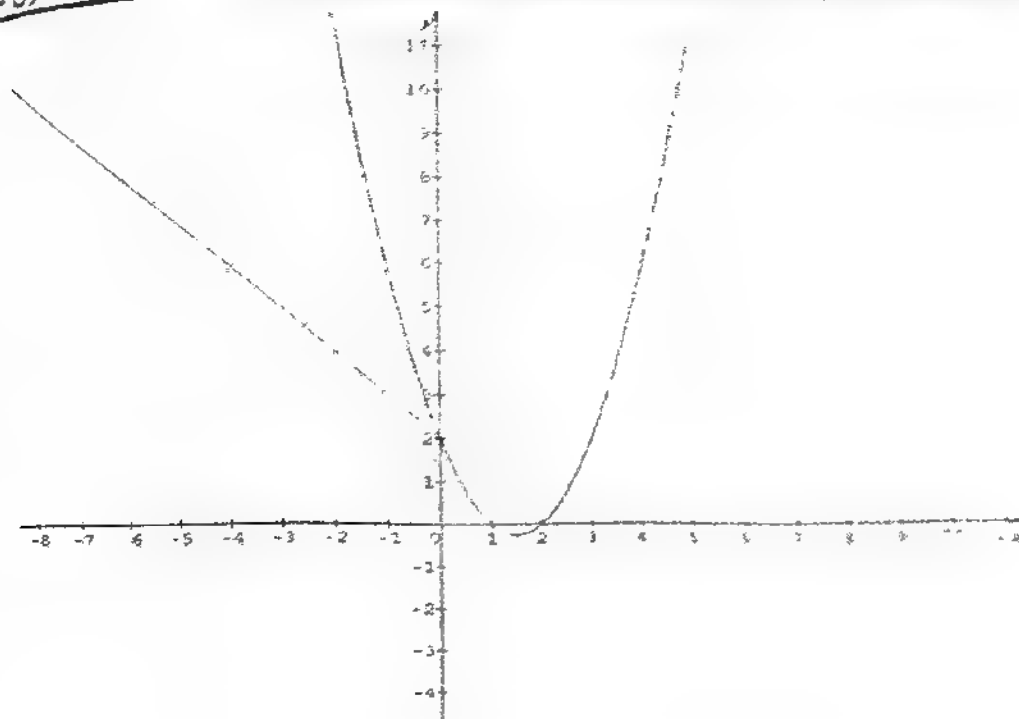
• التمثيل البياني للدالة  $\sin$  على  $[0; \pi]$ :

لإنشاء بيان هذه الدالة على المجال  $[0; 2\pi]$  فنسئ التمثيل البياني للدالة  $\sin$  على  $[0; \pi]$  وبالتناظر بالنسبة إلى النقطة  $(\pi; 0)$  نرسم الجزء على المجال  $[\pi; 2\pi]$ .

مسائل

• حل التعريف (60):

أ/ التمثيل البياني للدالتين:  $x \rightarrow -x+2$  و  $x \rightarrow x^2-3x+2$  باستعمال الحاسبة البيانية أو الكمبيوتر:



ب/ قراءة على الشكل المنجز، مجموعة حلول المعادلة  $f(x) = g(x)$  ومجموعة

حلول المتراجحة  $f(x) < g(x)$  ثم تأكد بالحساب:

\* من خلال الشكل التبعي:

\*  $f(x) = g(x)$  أي:  $S = \{0, 2\}$ .

\*  $f(x) < g(x)$  أي:  $x \in ]0, 2[$ .

$$f(x) = g(x)$$

$$x^2 - 3x + 2 = -x + 2$$

$$x^2 - 2x = 0$$

$$x(x - 2) = 0$$

\* حسابية:

$$x = 2 \text{ أو } x = 0$$

$$\text{ومنه: } S = \{0, 2\}$$

$$f(x) < g(x)$$

$$x^2 - 3x + 2 < -x + 2$$

$$x^2 - 2x < 0$$

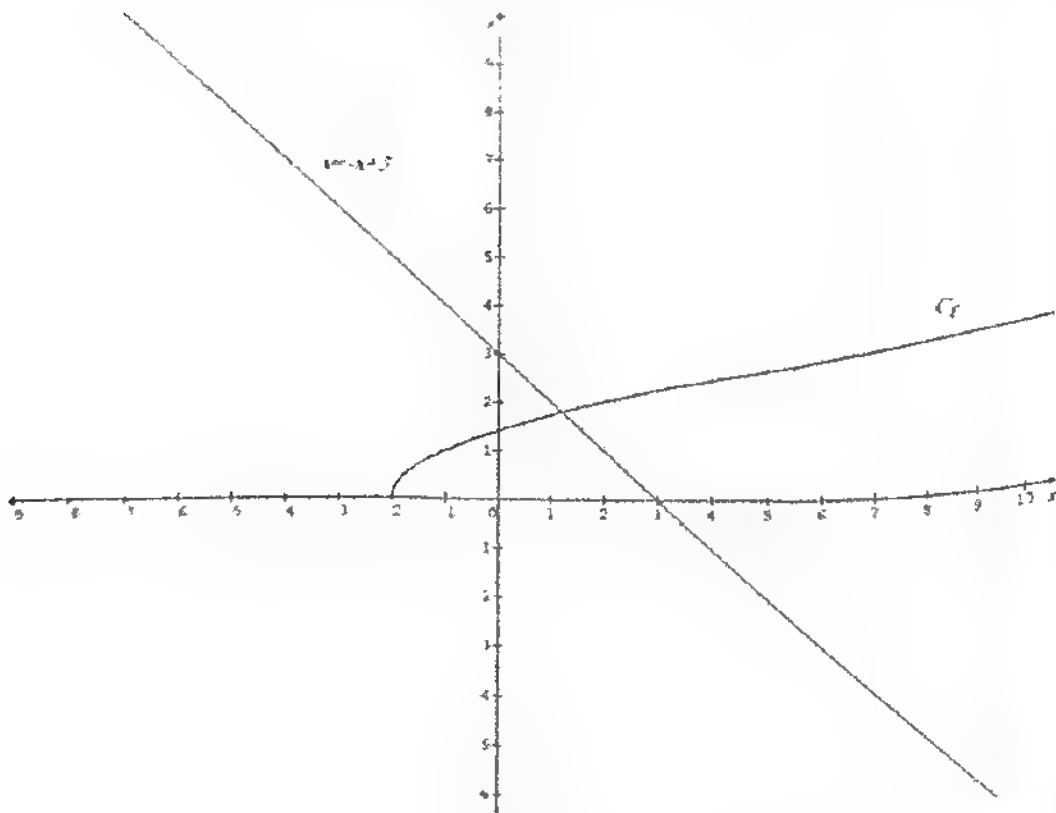
$$x(x-2) < 0$$

قيم $x$	$-\infty$	0	2	$+\infty$
إشارة $x$	-	○	+	+
إشارة $x-2$	-	-	○	+
إشارة $x(x-2)$	+	○	-	+

ومنه:  $S = ]0; 2[$

حل التعريف (61):

• التمثيل البياني للدوال  $f(x) = \sqrt{x+2}$  و  $g(x) = -x+3$



• استنتاج حصرا الحل المعادلة  $\sqrt{x+2} = -x+3$

حل المعادلة  $\sqrt{x+2} = -x+3$  هو فاصلة نقطة تقاطع التمثيلان البيانيين وبالتالي  
 حصرا الحل المعادلة  $\sqrt{x+2} = -x+3$  هو:  $1 < x_0 < 1,5$ .

### حل التمرين (62):

أ/ دراسة تغيرات الدالة  $f$  حيث:  $f(x) = 1 + \frac{3}{x}$  على المجال  $]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$

من أجل كل  $x_1, x_2$  من  $]0; +\infty[$  حيث:  $x_1 < x_2$   
 فإن:

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$$

$$\frac{3}{x_1} > \frac{3}{x_2}$$

$$1 + \frac{3}{x_1} > 1 + \frac{3}{x_2}$$

ومنه:  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]0; +\infty[$

من أجل كل  $x_1, x_2$  من  $]-\infty; 0[$  حيث:  $x_1 < x_2$   
 فإن:

$$\frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2}$$

$$\frac{3}{x_1} > \frac{3}{x_2}$$

$$1 + \frac{3}{x_1} > 1 + \frac{3}{x_2}$$

ومنه:  $f$  متناقصة تماما على المجال  $]-\infty; 0[$

$$x = \frac{3+0,99\dots 7}{0,99\dots 7} = 1 + \frac{3}{0,99\dots 7}$$

$$y = \frac{3+0,99\dots 3}{0,99\dots 3} = 1 + \frac{3}{0,99\dots 3}$$

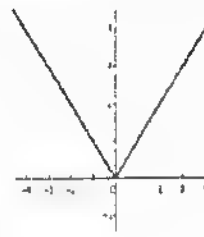
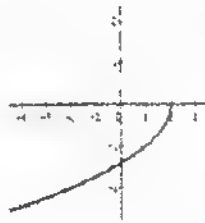
بما أن:  $0,99\dots 3 < 0,99\dots 7$

و  $f$  متناقصة على  $+\infty$  ; 0 فإن:  $f(0,99 \dots 3) > f(0,99 \dots 7)$   
ومنه:  $y > x$

**حل التعريف (63):**

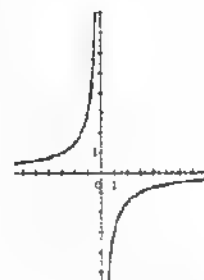
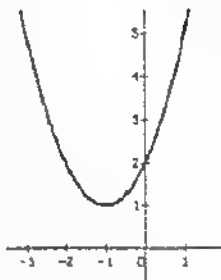
• إرفاق كل دالة من الدوال الآتية بتمثيلها البياني:

$$f: x \rightarrow \sqrt{-x+2}$$



$$k: x \rightarrow |x|$$

$$: x \rightarrow x^2 + 2x + 2$$



$$g: x \rightarrow -\frac{3}{x}$$

**حل التعريف (64):**

$f$  هي الدالة المعرفة على  $R$  كالآتي:

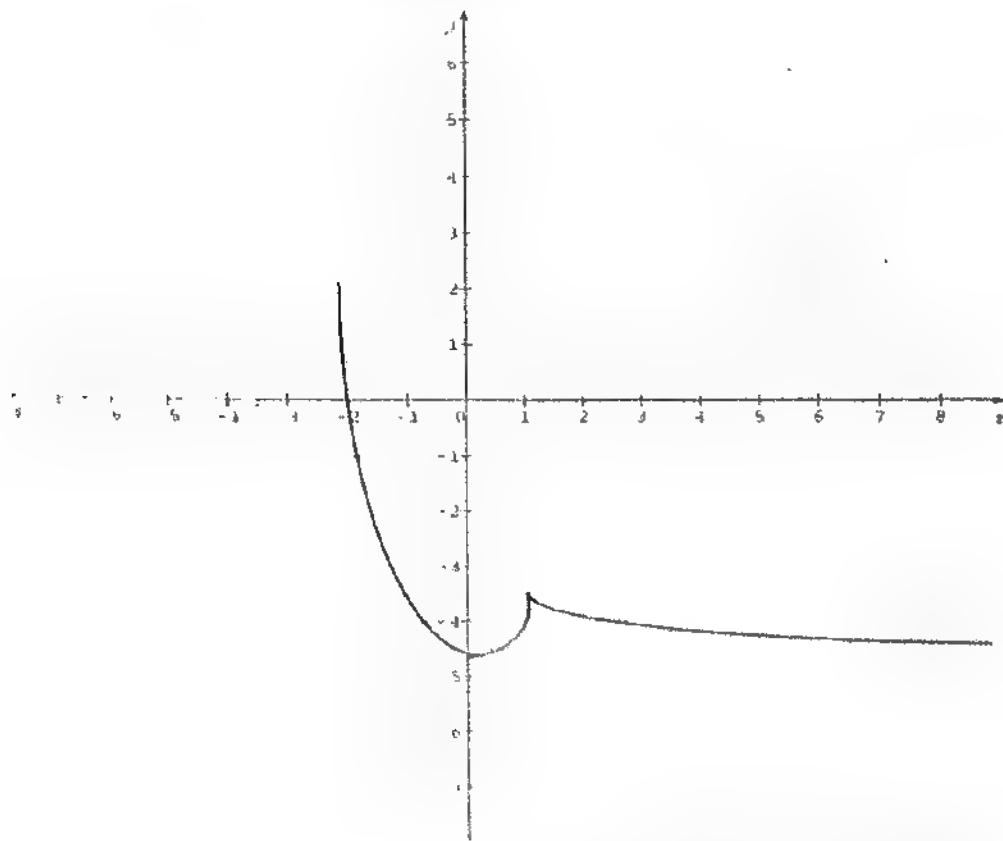
- $f(x) = x^2$  إذا كان:  $x \leq 0$ .
- $f(x) = \sqrt{x}$  إذا كان:  $0 < x \leq 1$ .
- $f(x) = \frac{1}{x}$  إذا كان:  $x > 1$ .

أ/ تمثيل بيانيا الدالة  $f$ : لاحظ الشكل أدناه.

ب/ حل بيانيا ثم جبريا المتراجحة  $f(x) \leq \frac{1}{4}$ :

الحل البياني للمترابحة  $f(x) \leq \frac{1}{4}$  : الحل البياني للمترابحة  $f(x) \leq \frac{1}{4}$

المجموعة  $S$  حيث :  $S = \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \left[0; \frac{1}{16}\right] \cup [4; +\infty[$



الحل الجبري للمترابحة  $f(x) \leq \frac{1}{4}$

لما  $x \in ]-\infty; 0[$  :  $f(x) \leq \frac{1}{4}$  يعني :  $x^2 \leq \frac{1}{4}$

أي :  $x^2 - \frac{1}{4} \leq 0$  و بالتالي :  $\left(x - \frac{1}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right) \leq 0$

بما أن  $x - \frac{1}{2} < 0$  و عليه  $x + \frac{1}{2} \geq 0$  أي :  $x \geq -\frac{1}{2}$

و عليه حل المترابحة على هذا المجال هو :  $x \in \left[-\frac{1}{2}; 0\right]$



لما  $x \in ]0; \frac{1}{4}]$  :  $f(x) \leq \frac{1}{4}$  يعني :  $\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}$  بتربيع :  $x \leq \frac{1}{16}$

و عليه حل المتراجحة على هذا المجال هو  $x \in \left[0; \frac{1}{16}\right]$ .

لما  $x \in ]\frac{1}{4}; +\infty[$  :  $f(x) \leq \frac{1}{4}$  يعني :  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}$  أي :  $4 \leq x$

و عليه حل المتراجحة على هذا المجال هو  $x \in [4; +\infty[$ .

وبالتالي الحل الجبري للمتراجحة  $f(x) \leq \frac{1}{4}$  هي المجموعة  $S$  حيث :

$$S = \left[-\frac{1}{2}; 0\right] \cup \left[0; \frac{1}{16}\right] \cup [4; +\infty[$$

**حل التمرين (65) :**

\* بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :  $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2 \sin x \cos x$

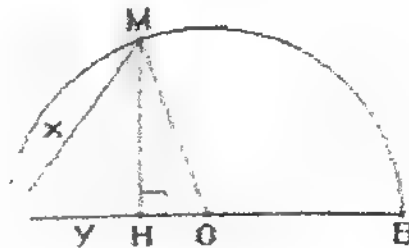
لنينا من أجل كل  $x \in \mathbb{R}$  :

$$\begin{aligned} (\sin x + \cos x)^2 &= \sin^2 x + \cos^2 x + 2 \sin x \cos x \\ &= 1 + 2 \sin x \cos x \end{aligned}$$

\* بيان أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  :

$$\begin{aligned} (1 + \sin x + \cos x)^2 &= 2(1 + \cos x)(1 + \sin x) \\ (1 + \sin x + \cos x)^2 &= (1 + \sin x)^2 + \cos^2 x + 2(1 + \sin x) \cos x \\ &= 1 + (\sin x)^2 + (1 - \sin^2 x) + 2(1 + \sin x) \cos x \\ &= (1 + \sin x)^2 + (1 - \sin x)(1 + \sin x) + 2(1 + \sin x) \cos x \\ &= (1 + \sin x)(1 + \sin x + 1 - \sin x + 2 \cos x) \\ &= (1 + \sin x)(2 + 2 \cos x) = 2(1 + \sin x)(1 + \cos x) \end{aligned}$$

**حل التمرين (66) :**



M نقطة متغيرة على نصف دائرة مركزها

O وقطرها  $[AB]$  حيث :  $AB = 4$ .

المسألة 1

نسمي  $H$  المسقط العمودي للنقطة  $M$  على  $[AB]$ . نضع  $AM = x$ . ونعلم  $AB = 4$ .

(1) النقطة  $H$  تنتمي إلى  $[AB]$ :

ومنه:

$$0 \leq AH \leq AB$$

$$0 \leq y \leq 4$$

$$y \in [0, 4]$$

(2) أ/ الحالة الأولى:

$H$  بين  $A$  و  $O$ :

\* في المثلث  $AMH$  القائم في  $H$  حسب فيثاغورث:

$$AM^2 = AH^2 + MH^2$$

$$x^2 = y^2 + MH^2$$

$$MH^2 = x^2 - y^2$$

في المثلث  $OMH$  القائم في  $H$  حسب فيثاغورث:

$$OH^2 = MH^2 + OH^2$$

$$OH^2 = MH^2 + (2-y)^2$$

$$OH^2 = MH^2 + 4 - 4y + y^2$$

$$MH^2 = 4y - y^2$$

ب/ بما أن:

$$MH^2 = x^2 - y^2$$

$$MH^2 = 4y - y^2$$

$$x^2 - y^2 = 4y - y^2$$

$$y = \frac{1}{4}x^2$$

(3) أ/ دراسة تغيرات  $f$  على  $[0, 4]$ :

من أجل كل  $x_1, x_2$  من  $[0, 4]$  حيث:  $x_1 < x_2$

فإن:  $x_1' < x_2'$

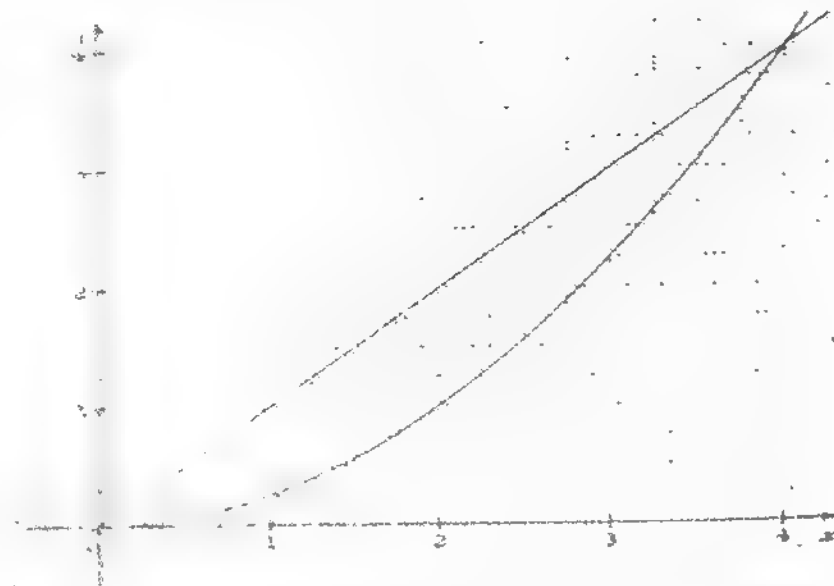
أي:  $\frac{1}{4}x_1' < \frac{1}{4}x_2'$  وبالتالي:  $f(x_1) < f(x_2)$

ومنه:  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0,4]$

ب/

$x$	0	1	2	3	4
$f(x)$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{9}{4}$	4

ج/ التمثيل البياني لـ  $f$ :



(4)  $g$  هي الدالة المعرفة على  $[0,4]$  بالشكل  $g(x) = x$ .

أ/ تمثيل بيانياً  $g$  في المعلم السابق.

ب/ استنتج من البيان السابق أنه من أجل كل عدد حقيقي من  $[0,4]$  لدينا:  $g(x) \geq f(x)$

من البيان لدينا  $(C_f)$  يقع فوق  $(C_g)$  لما  $x \in [0,4]$

ومنه:  $g(x) \geq f(x)$ .

(5) أ/ بيان أنه توجد قيمة  $x_0$  للعدد  $x$  تجعل  $4M - 4H$  أكبر ما يمكن.  $4M - 4H$

أكبر ما يمكن يعني أن:  $x - y$  أكبر ما يمكن.

من خلال البيان نجد أنه من أجل  $x_0 = 2$  يكون  $AM - AH$  أكبر ما يمكن.

$$AM - AH = x - y = x - \frac{1}{4}x^2 \quad \text{ب/}$$

$$h(x) = x - \frac{1}{4}x^2$$

$$= -\frac{1}{4}(x^2 - 4x) = -\frac{1}{4}[(x-2)^2 - 4] \quad \text{لدينا:}$$

• دراسة تغيرات  $h$  على  $[0, 4]$ :

• على المجال  $[0, 2]$ :

من أجل كل  $x_1, x_2$  من  $[0, 2]$  حيث:  $x_1 < x_2$

فإن:  $0 < x_2 - 2 < x_1 - 2$  بما أن: الدالة مربع متناقصة على المجال  $]-\infty; 0]$

$$(x_1 - 2)^2 > (x_2 - 2)^2$$

$$(x_1 - 2)^2 - 4 > (x_2 - 2)^2 - 4$$

$$-\frac{1}{4}[(x_1 - 2)^2 - 4] < -\frac{1}{4}[(x_2 - 2)^2 - 4]$$

$$h(x_1) < h(x_2)$$

ومنه:  $h$  متزايدة تماماً على المجال  $[0, 2]$

على المجال  $[2, 4]$ :

من أجل كل  $x_1, x_2$  من  $[2, 4]$  حيث:  $x_1 < x_2$

فإن:  $x_1 - 2 < x_2 - 2$

$$(x_1 - 2)^2 < (x_2 - 2)^2$$

$$(x_1 - 2)^2 - 4 < (x_2 - 2)^2 - 4$$

$$-\frac{1}{4}[(x_1 - 2)^2 - 4] > -\frac{1}{4}[(x_2 - 2)^2 - 4]$$

$$h(x_1) > h(x_2)$$

ومنه:  $h$  متناقصة تماماً على المجال  $[2, 4]$

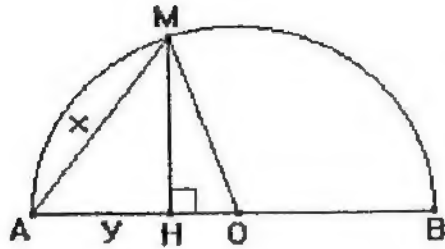
$x$	0	2	4
$h$	0	1	0

تقبل الدالة  $h$  قيمة حدية عظمى لما  $x = 2$ .

ومنه:  $AM - AH$  أكبر ما يمكن لما  $x = 2$ .

وضعية  $M$ :  $y = \frac{1}{4}x^2 = 1$  أي:  $AH = 1$ .

حل التعريف (67):

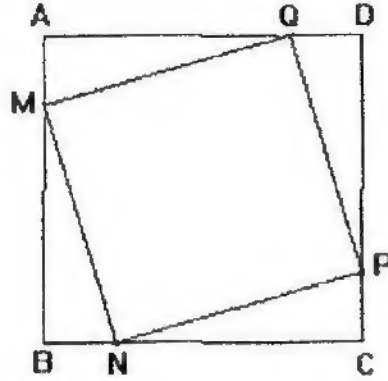


$ABCD$  مربع طول ضلعه  $4cm$ . النقطة  $M$ ,

$N, P, Q$  تنتمي هي على الترتيب إلى  $[AB]$ ,

$[BC]$ ,  $[CD]$ ,  $[DA]$ .

حيث:  $AM = BN = CP = DQ = x$ .



(1)  $x \in [0, 4]$ .

(2) حساب مساحة المربع  $MNPO$ :

$S$ : مساحة  $MNPO$ :

لدينا:  $MN^2 = MB^2 + BN^2$  أي:  $MN^2 = 3^2 + 1^2 = 9 + 1 = 10$

ومنه:  $S = MN^2 = 10 cm^2$

(3) بيان أن مساحة المربع  $MNPQ$  هي:  $f(x) = 2x^2 - 8x + 16$  لدينا:

$$MN^2 = (4-x)^2 + x^2$$

$$\begin{aligned} MN^2 &= 16 - 8x + x^2 + x^2 \\ &= 2x^2 - 8x + 16 \end{aligned}$$

ومن ثم:  $S = MN^2 = 2x^2 - 8x + 16$

(4) التأكد أن:  $f(x) = 2[(x-2)^2 + 4]$  وتعيين أصغر قيمة ممكنة للعدد  $f(x)$ :

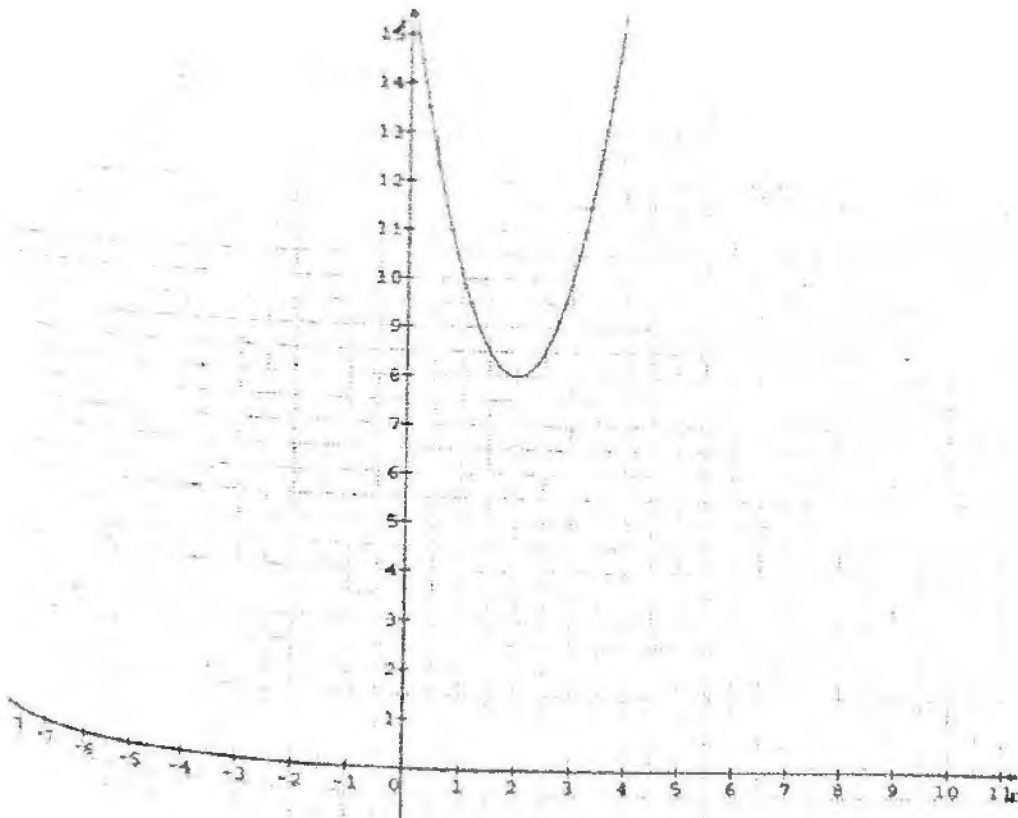
$$\begin{aligned} f(x) &= 2x^2 - 8x + 16 \\ &= 2[x^2 - 4x + 8] = 2[(x-2)^2 - 4 + 8] \\ &= 2[(x-2)^2 + 4] \end{aligned}$$

أصغر قيمة ممكنة للعدد  $f(x)$  هي:  $f(2) = 8$ .

لأن:  $f$  متناقصة على  $[0, 2]$  و  $f$  متزايدة على  $[2, 4]$ .

ومن ثم:  $f$  تقبل قيمة حدية صغرى لما  $x = 2$ .

(5) إنشاء  $(C_f)$ :



• القيمة المقربة للعدد  $x$  الذي من أجله تكون مساحة المربع  $MNPQ$   $12\text{cm}^2$  :  
 من خلال البيان توجد قيمتان تكون من أجلهما مساحة المربع  $MNPQ$   $12\text{cm}^2$  هما:  
 $x_0 = 0,6$  و  $x_1 = 0,6$

القيم الحقيقية لهذه القيم هما:  $x_0 = 2 - \sqrt{2}$  و  $x_1 = 2 + \sqrt{2}$

ب/ تشكيل جدول تغيرات الدالة  $f$  :

$x$	0	2	4
$h$	16	8	16



[www.tarbiadz.online](http://www.tarbiadz.online)